研究生教学用书

黎曼几何讲义

忻元龙　编著

复旦大学出版社

内 容 提 要

Riemann 几何是 Gauss 古典曲面论的自然推广，是现代微分几何的重要基础.

本书内容包括 Riemann 度量，Levi-Civita 联络，曲率张量，测地线，指数映照，完备性，Jacobi 场和共轭点，等距和全测地子流形，Cartan-Hadamard 定理，空间形式，测地线的第一、第二变分公式及其应用(如 Bonnet-Myers 定理，Weinstein 定理等)，Morse 形式与 Morse 指标定理，割迹与单射半径，比较定理，体积与体积比较定理等内容，涵盖了经典“整体黎曼几何”的基本内容. 这些内容可供已经学过微分流形基础的学生学习.

本书可作为数学专业研究生教材，也可供高等学校数学系及物理系本科生，研究生及有关科研人员参考.

序　　言

作者从 1988 年开始为复旦大学数学研究所研究生讲授"黎曼几何"课程，迄今已有 10 余次.

美国加州大学 Berkeley 分校伍鸿熙教授，于 1984 年夏天，在北京大学举办的暑期教学中心讲授微分几何. 后来根据他的讲稿，整理成书《黎曼几何初步》，由北京大学出版社出版. 开始，我的课程完全按该书前 11 节内容讲解. 后来，根据学生的接受程度和本人在讲课中的体验，慢慢地，在内容取舍、次序安排、定理的证明方法等方面都有所改变，形成现在的《黎曼几何讲义》. 全书正文为 15 节. 由于本课程是在"微分流形"的基础上开设的，在付梓的时候，又在书后加了长长的一节附录，介绍"微分流形"的基本概念，以利读者在学习 Riemann 几何时查阅. 本书习题不多，其实，其中有些内容，在我的课程中原来就是习题或考题，现在也一并写在书中了. 限于作者的学术水平，书中难免有欠妥甚至错误之处，恳请读者斧正.

本讲义从 Riemann 流形的定义开始，在充分研究测地线的基础上，再用测地线作为工具，探讨 Riemann 流形的几何性质，直到各种"比较定理"，涵盖了经典"整体 Riemann 几何"的基本内容. 这些内容供一个学期 50—60 学时讲授. 本课程是为基础数学专业的硕士研究生开设的学位课程. 对几何方向的学生还需要有后续课程，如"Riemann 几何续论"，"子流形理论"等课程，才能逐步进入研究领域. 近年来由于微分几何的影响越来越大，也有很多应用数学专业、理论物理专业的研究生旁听或正式修学本课程.

笔者在读大学的时候开始学习 Riemann 几何. 那是 1962 年，苏步青先生亲自为我们讲授一学年的课. 教材是油印讲义，内容基本取自 L. P. Eisenhart 的 *Reimannian Geometry* 一书. 这是用张量分析写成的经典 Riemann 几何的书. 这几十年来，Riemann 几何有很大发展，学科格调也有极大的改变. 但是，笔者很怀念早年的学习生活和苏先生言传身教的崇高风范.

复旦大学出版社范仁梅女士多次与作者联系，热心接洽，这才促成本讲义的出版，在此表示衷心的感谢.

忻元龙

2010 年 6 月于复旦大学

目　录

1 引　　言

微分几何的发展,起初与微积分的发展是同步的.当时,有很多重要的数学家用微积分解决了很多几何问题.在 Gauss 之前,代表人物是 L. Euler, G. Monge, J. L. Lagrange,但是最重要的是德国大数学家 C. F. Gauss.他是数学中的全才,他的数学研究几乎遍及数学的所有领域,在数论、代数、非欧几何、复变函数、微分几何等领域都做出开创性的贡献.他在 1827 年时出版了一本书,叫《曲线与曲面的一般研究》[11].他这本书的出版一般被认为是微分几何作为独立学科的开始. Gauss 当时担任天文台的台长,所以通常认为他的几何工作与天文的发展和大地测量等实际问题是有关系的.大学课程念的微分几何内容基本上就是 Gauss 那个时候的理论和结果.

从微分几何发展的历史来讲,在 Gauss 以后,在 19 世纪,最重要的当属 C. F. Riemann 和 F. Klein,他们都是德国数学家.德国的制度是这样的,拿了博士学位以后,不能马上当教授,做教授要有教授资格,要做一个报告. Riemann 那时到哥廷根大学去做教师资格报告[21].他给了几个题目,后来委员会选了最后的题目.他在 1854 年的那个演讲,实际上标志 Riemann 几何的开始. Riemann 几何是曲线曲面论的质的发展. Gauss 研究的是 3 维欧氏空间的曲线曲面的性质. Riemann 先把几何对象推广到高维,更重要的是,他把 Gauss 曲面论中内蕴的几何性质和外在的几何性质分开来了.

考虑在 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面,参数方程为 $x^i = x^i(u, v)$, x^i 表示在三维空间中的位置向量,据此可决定曲面的第一基本形式和第二基本形式.第一基本形式通常写成

$$\mathrm{d}s^2 = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2.$$

第一基本形式反映了曲面上邻近两点曲线的长度.第二基本形式记成

$$L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2,$$

由曲面在空间的位置决定,反映了曲面在空间的状态,平面与柱面的第一基本形式一样,但其第二基本形式不一样. Riemann 在 Gauss 曲面论的基础上,将由曲面的度量所决定的性质与曲面放在高维欧氏空间中,这两个事情区分开来.在曲面第一基本形式基础上,对 n 维空间,也能定义它的度量形式

$$ds^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j.$$

它决定了 n 维空间的度量性质,这个度量称为 Riemann 度量. 对一个 n 维流形,有了度量,就构成了 Riemann 流形. Riemann 的想法反映了人类对空间形式的了解比以前有了进一步的深化. 最简单的例子可以考虑平环. $\mathbb{R}^2$关于整数 Z 的商空间是柱面,再取整数 Z 的商空间就得到环面 T^2. 利用$\mathbb{R}^2$中的度量可以定义环面中的度量,它的度量跟 $\mathbb{R}^2$ 是局部一样的. 所以存在紧致的二维曲面,在每一点的曲率为 0. 在 Gauss 的 $\mathbb{R}^3$中的曲面论中不可能研究这样一种空间形式. Riemann就在这个著名演讲中提出了 Riemann 几何. 整个演讲只有一个公式. 这个公式是怎样写出来的,直到现在还是个谜. 他给了一个曲率等于-1 的曲面的二次形式. 这也就是通常所谓的双曲空间$\mathcal{H}^2$ 的 Poincaré 模型. Riemann 几何将 Lobachevsky 的非欧几何纳入自己的轨道.

在 Gauss 以后对几何发展有影响的另外一个人就是 F. Klein. 他在 1872 年提出了 Erlangen 计划,认为空间的几何性质是由群来决定的. Riemann 和 Klein 分别对几何某一方面的深刻理解,把几何学推向进一步发展. 一个认为几何和度量有关,一个认为几何和群有关,而把这两者统一起来的,就是法国大数学家E. Cartan.

在 Riemann 几何提出以后,有很多发展,这个发展主要是以 Ricci 为代表的意大利几何学派,为了发展 Riemann 几何,他们研究 Ricci 的张量分析,但计算很复杂. 用张量分析研究 Riemann 几何,开始时在整个数学界影响并不大,一方面它比较繁,另一方面它跟其他学科的关系也不太大.

在 Einstein 发表了狭义相对论以后,用了 7 年时间,才建立了广义相对论. 这除了物理上时空概念的理解困难,还有另外一个困难就是几何的原因. 通常几何性质跟坐标没有关系. 他要发展他的广义相对论,就要找到一种数学方法,这是与通常不一样的数学方法,他找到了张量分析. Einstein 在一篇论文中说:为什么建立广义相对论又用了 7 年时间呢? 其主要原因是:要摆脱坐标必须有直接的度量意义这个旧概念是不容易的. Riemann 几何一下子就热起来,差不多搞相对论理论物理的人都要学几何. 年代久一点的 Riemann 几何的教科书出版于 20 世纪 20 年代,都是用张量分析作为工具写的. 广义相对论促进了这些书的出版,理论物理对几何的影响相当大.

Riemann 几何的性质跟一点附近的度量有关,另外,几何性质跟群联系在一起,将这两者结合起来,并且在更高的水平上面统一起来,是从 E. Cartan 开始的. Cartan 是法国的大数学家. 从他开始把几何的整个性质建立在微分流形纤维丛的基础上. 纤维丛上有群,研究向量丛有度量,这样就把群的概念跟度量的概念完全统一起来. 当然,Cartan 还发展了活动标架法,继承发展了 G. Darboux

的工作，且在 Klein 观点影响下进一步研究齐性空间的微分几何，他在对 Lie 群 Lie 代数研究的基础上，把对称空间进行了分类.

以前的 Riemann 几何实际上是研究局部性质，研究 Riemann 流形一点附近的性质，并不考虑空间的整体性质. 整体 Riemann 几何一方面有它的需要，另外，拓扑学的发展为它创造了条件.

1943 年前后，陈省身先生在 Princeton 期间，为整体微分几何发展作出了杰出的贡献. 现在我们看一下曲面，它上面有度量，也就有 Gauss 曲率 K，如果曲面是紧的话，就可以在整个曲面上对 Gauss 曲率积分. 不管曲面上的度量怎么样，一个曲面上不一定只有一个度量，还可以有另外一个度量，换了度量以后，K 也就变了，但积分与曲面的度量无关. 这就得到 Gauss-Bonnet 公式.

对高维 Riemann 流形，曲率可以推广，称为 Riemann 曲率张量，被积函数是由曲率张量组成的很复杂的代数式子，这个式子在整个流形上的积分，应该等于这个流形拓扑不变量. 陈先生到 Princeton 的时候，当时也有证明，但那个证明叫外在的证明. 要把 Riemann 流形嵌入在适当高维的欧氏空间中去，作为子流形再来研究. 前文中已谈到，Riemann 的贡献，就是证明曲面本身的性质跟曲面在某个外围空间没有关系. 当时得到的证明是外在证明，陈先生到Princeton的时候，大家都希望有一个内蕴的证明，跟流形怎么放到外围欧氏空间中没有关系，他证明了. 这是陈先生的一个重要的非常漂亮的工作. 后来这个公式称为 Gauss—Bonnet—陈公式[5].

陈先生在这个基础上，又发展了示性类理论[6]，即著名的“陈省身示性类”，简称为陈类. 陈类不仅在微分几何中很重要，在代数几何，甚至数学物理、理论物理中都很重要，已成为现代科学中的基本概念. 从 E. Cartan 以后，几何的发展跟拓扑学走在一起，进一步朝那个方向发展；还有指标理论，都是研究局部不变量的与整体不变量之间的关系. 用拓扑公理化办法也可以定义示性类. 但用几何的方法的好处是便于计算.

上世纪留下的一个大问题是 Henri Poincaré 在 1904 年提出的所谓 Poincaré 猜想. 2 维流形或曲面的拓扑早在 19 世纪就已经清楚了. 对紧曲面可定义一个亏格 g，取值于非负整数，直观上亏格可理解为洞的个数，所有的曲面可用亏格分类. 高维的相应问题要困难得多. 这种流形最基本的是 3 维单位球面. Poincaré 注意到 2 维球面区别于其他曲面的特点在于球面上每条简单闭曲线都可以在球面上连续地形变收缩到一点. Poincaré 提出 3 维时的相应问题：若一个光滑 3 维紧流形具如下的性质：这个流形中的每条简单闭曲线可以连续地收缩为一个点，它同胚于球面吗？

他以很高的预见性评论道：但是，离我们解决这个问题还相当遥远. 20 世纪

50 年代末 60 年代初,出现了一批惊人的成果. 人们发现实际上,高维流形的研究比 3 维流形要容易. 1960 年,S. Smale 证明了 5 维以上的 Poincaré 猜想;20 年以后,M. Freedman 证明了 4 维 Poincaré 猜想. Smale 和 Freedman 都是 Fields 奖获得者. 给定一个光滑 3 维流形,它上面所有的 Riemann 度量构成一个无限维空间. Richard Hamilton 提出一个研究 Ricci 流,即研究微分方程的方法. 换句话说,度量随时间变化. 这是抛物型方程. 人们期望像热传导问题一样,对基本群有限的 3 维流形,正曲率会沿着 Ricci 流逐渐扩散,流形会有常曲率. Hamlton 在很特殊情形证明了猜想:如果从一个正 Ricci 曲率的 3 维流形出发. 但对一般情形会遇到严重困难,这个流会趋于一个奇点. 2003 年,Grisha Perelman 在网上贴出了几篇论文,解决了 Hamilton 方案中的困难.

我们再考虑几何和分析的关系. 看极小曲面问题. 比利时物理学家 J. Plateau 在 1847 年提出下列问题:用一铜丝,任意弯成一条封闭的空间曲线,将其放在肥皂液中,然后把它轻轻取出来,肥皂液以铜丝为边界,张成一个薄膜表面,问数学上怎样来描述这一现象. 首先这个问题很麻烦,麻烦的地方是问题很难归结成数学能做的形式. 一直到 1930 年,这个问题由美国的 Douglas 和 Rado 解决了. 这使 Douglas 和 Ahlfors 共获得 1936 年的第一次 Fields 奖. 实际上,在 $\mathbb{R}^3$ 中给定一条 Jordon 曲线,以它为边界的曲面的拓扑性质可以很复杂. 实际上,他们做的是圆盘拓扑型,并且做的是广义极小曲面,在某一点度量可能退化,还有浸入的自相交问题. 不管怎么样,他们把 Plateau 问题向前推进了一大步.

由于近几十年偏微分程的发展,使得几何中的很多问题得到了解决,以丘成桐为代表. 他解决了很多重要问题,于 1983 年获得 Fields 奖. 例如,他解决了 Calabi 猜想,即紧 Kaehler 流形上每一个陈类一定可用某一个 Kaehler 度量的 Ricci 形式表示. 这是个存在性问题,可化为 Monge-Ampère 方程. Calabi 猜想的解就是方程整体解的存在性问题. 它揭示了 Kaehler 流形上拓扑结构、复结构和度量结构之间的深刻关系,从而促成很多困难问题的解决[33]. 又如,他和 R. Schoen合作,解决了广义相对论中的正质量猜想,是利用极小曲面的方法解决的[22]. 从几何上来讲,它和正数量曲率度量的存在性密切相关,这样,就发展起来几何分析. 丘成桐由于在几何分析领域的杰出贡献,以及他在几何和物理的多个领域产生的深刻而引人注目的影响而荣获 2010 年度的 Wolf 奖. 同时获得 Fields 奖和 Wolf 奖这两项国际数学界最高奖项的数学家是屈指可数的.

几何与物理之间的关系,正如前面提到的,Riemann 几何从少数数学家的书斋走向科学界,当归功于 Einstein 广义相对论. 理论物理对几何的影响还表现在 Yang-Mills 方程. 1954 年,杨振宁在 Princeton,他们想推广 Maxwell 方程,提出了 Yang-Mills 方程[31]. 从几何角度来看,Yang-Mills 理论与几何中纤维丛理论

有关系,但物理学家并不知道纤维丛理论.在联络论中没有 Yang-Mills 泛函.后来 Yang-Mills 得到了这个泛函.数学家回过来看,的确感到这个泛函很有道理.对流形上的向量丛,有了联络就有曲率. Yang-Mills 泛函实际上是曲率模长的积分.它是定义在联络空间上的,它的自变量是联络.当联络变的时候曲率也变了,泛函值也变了. Yang-Mills 场就是这个泛函的临界点.临界点不一定是最小点.物理学家感兴趣的是真正意义上的极小点,称为瞬子解.后来研究瞬子解的全体,Donaldson[8] 发现它构成一个流形.对这个流形的研究就得到原来这个流形的很多性质.这就是所谓低维拓扑中的分析方法,Donaldson 得到这个结果是站在巨人的肩膀上的,是建立在 Atiyah 关于 Yang-Mills 场重要贡献的基础上.

几何的发展一直处在数学发展的核心地位,为很多大数学家所关注.也由于空间的几何性质密切关系到人类对时空的认识,所以几何的发展也受到物理学家的密切关注.从另外一方面来看,几何的问题比较简洁,问题的目标很明确,问题不是人为想出来的,是自然的.这就需要运用数学的综合知识,才能够把它彻底解决.几何的问题都是非线性的,到现在为止,人类对非线性现象的认识还是很不够,所以,几何的研究,几何的进一步发展将推动人类对非线性现象认识的发展.

从微分几何的发展可见,Riemann 几何处于重要的地位,很多重要问题与此密切相关.作为微分几何方向硕士研究生的专业基础课,本课程介绍 Riemann 几何的基本概念和方法,从而为学生进一步深造和学习相关学科奠定基础.

2 Riemann 度量

设 M 是一个 m-维光滑流形. 对每点 $p \in M$, 在点 p 的切空间 T_pM 上定义一个对称正定双线性形 $\langle \cdot, \cdot \rangle$. 这个对应在下列意义下是光滑的:存在点 p 附近的坐标邻域 U,它的坐标是 $(x^1, \cdots, x^m)$. 以 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \cdots, m$, 表示坐标曲线的切向量. 定义它们间的内积为 $g_{ij} = \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$. 光滑性意味着所有 g_{ij} 在 U 中是光滑的. 这就在 M 中定义了 **Riemann 度量**,从而它成为一个 **Riemann 流形**.

g_{ij} 依赖于局部坐标的选取. 例如,在欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中,通常的平坦度量在 Descartes 坐标系 $\{x^1, x^2, x^3\}$ 中为 $g_{ij} = \delta_{ij}$, 但是在柱面坐标 $\{r, \theta, z\}$ 中或球面坐标 $\{\rho, \theta, \phi\}$ 中,对应的 g_{ij} 改变了. 我们注意到二次微分形式

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$$

不依赖于局部坐标的选取,它称为度量形式或 Riemann 度量. $\mathrm{d}s$ 是无穷小曲线的长度,也称为线素. 上式中,指标 i, j 都是重复指标,表示在它的取值范围内作和,这里将作和记号省略了. 在文献中,通常称为 Einstein 和式约定. 本书中应用这个约定.

Riemann 度量也可用向量丛的语言来描述. 设 $S(M) = T^*M \odot T^*M$ 为切从 TM 的对称共变张量积丛. 那么,该丛的任一光滑截面定义了 M 上的一个 Riemann度量,只要它在每一点是正定的.

一旦度量给定,切向量的长度就知道了,同一点出发的向量间的夹角也知道了. 对任何 $X, Y \in T_pM$, 有

$$|X| = \sqrt{\langle X, X \rangle},$$

$$\cos\angle(X, Y) = \frac{\langle X, Y \rangle}{|X||Y|}.$$

从而,我们也可以求一条曲线的长度. 设 $\gamma: [a, b] \to M$ 是 Riemann 流形 M 上的一条分段光滑的曲线,它的长度被定义为

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}|\,\mathrm{d}t.$$

由此可见,古典曲面论中的第一基本形式也就是$\mathbb{R}^3$中曲面的 Riemann 度量. Riemann几何也就是古典曲面论中内蕴几何的推广.

例 2.1 设$M=\mathbb{R}^m$. 那么M只被一个坐标领域$(x^1, \cdots, x^m)$所覆盖,并且$g_{ij}=\delta_{ij}$定义了常用的度量而成为普通的欧氏空间.

例 2.2 m-维球面$S^m=\{x\in\mathbb{R}^{m+1};|x|^2=1\}$是作为$(m+1)$-维欧氏空间$\mathbb{R}^{m+1}$中的标准嵌入子流形定义的. 设$i:S^m\to\mathbb{R}^{m+1}$为标准嵌入. 对任何$p\in S^m$, $X, Y\in T_pS^m$, 由下式定义了诱导度量

$$\langle X, Y\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle i_* X, i_* Y\rangle_{\mathbb{R}^{m+1}}.$$

这就是曲面论中定义第一基本形式的方法. 它对欧氏空间中的浸入子流形都适用.

例 2.3 在球面S^m中,定义一个等价关系$\sim$,它将球面中的对径点看为一点. 那么,我们得到实射影空间$RP^m=S^m/\sim$. 设$\pi:S^m\to RP^m$是覆盖映照. 那么对任何$p\in RP^m$, $\pi^{-1}(p)=q_1, q_2$. 设$X\in T_p(RP^m)$, 它有两个不同提升$\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$,它们有相同的长度. 因此可以定义

$$\langle X, X\rangle = \langle \bar{X}_1, \bar{X}_1\rangle,$$

从而射影空间RP^m也成为 Riemann 流形.

例 2.4 设$B^n=\{x\in\mathbb{R}^n;|x|<1\}$为单位开实心球. 在它上面可定义Riemann度量

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{4}{[1-\sum_i (x^i)^2]^2}\sum_i (\mathrm{d}x^i)^2.$$

这就是单位球中著名的 Poincaré 度量.

一般地,我们有下列定理.

定理 2.1 *微分流形M上总存在一个 Riemann 度量.*

证明 设(U_α, x_α^i)是M上的一个局部有限的坐标图册. 那么,M上存在一个附属于$\{U_\alpha\}$的单位分解$\{\phi_\alpha\}$. 在每个U_α上定义

$$\mathrm{d}s_\alpha^2 = \sum (\mathrm{d}x_\alpha^i)^2.$$

这样,在M上的 Riemann 度量定义为

$$\mathrm{d}s^2 = \sum \phi_\alpha \mathrm{d}s_\alpha^2.$$

事实上,对任何 $q \in M$, 取坐标邻域(U, x^i),使它的闭包$\overline{U}$是紧的. 由于$\{U_\alpha\}$的局部有限性,U 只和有限个 $U_{\alpha 1}, \cdots, U_{\alpha\gamma}$相交,因此,$ds^2$ 限制在 U 上成为

$$ds^2 = \sum_{\lambda=1}^{\gamma} \phi_{\alpha\lambda}\, ds^2_{\alpha_\alpha} = g_{ij}\, dx^i dx^j,$$

其中

$$g_{ij} = \sum_{\alpha,\, k} \phi_{\alpha_\lambda} \frac{\partial x^k_{\alpha_\lambda}}{\partial x^i} \frac{\partial x^k_{\alpha_\lambda}}{\partial x^j}.$$

对任何 $p \in U$, 由于 $0 \leqslant \phi_\alpha \leqslant 1$, $\sum \phi_\alpha = 1$, 存在 β,使 $\phi_\beta(p) > 0$, 因此

$$ds^2(p) \geqslant \phi_\beta ds^2_\beta > 0,$$

由此可见,ds^2 是处处正定的.

证迄

3 Levi-Civita 联络

设 M 是 Riemann 流形，$\pi: E\to M$ 是向量丛，$\Gamma(E)$ 表示由 E 上所有截面组成的无限维向量空间. 向量丛 E 上的**联络(connection)**是满足下列性质的映照 $\nabla: \Gamma(TM)\times\Gamma(E)\to\Gamma(E)$（对 $X\in\Gamma(TM)$ 和 $\phi\in\Gamma(E)$，$\nabla_X\phi$ 表示 (X, ϕ) 在映照 ∇ 下的像）：

(1) 对任何 $f\in\Gamma(M\times\mathbb{R})$，有

$$\nabla_{fX}\phi = f\nabla_X\phi;$$

(2) 对任何 $Y\in\Gamma(TM)$，有

$$\nabla_{X+Y}\phi = \nabla_X\phi + \nabla_Y\phi;$$

(3) 对任何 $\psi\in\Gamma(E)$，有

$$\nabla_X(\phi+\psi) = \nabla_X\phi + \nabla_X\psi;$$

(4) 对任何 $f\in\Gamma(M\times\mathbb{R})$，有

$$\nabla_X f\phi = X(f)\phi + f\nabla_X\phi.$$

我们知道任何向量丛上联络总是存在的. 特别地，切丛 TM 上必存在联络. 对 Riemann 流形 M，我们现在感兴趣的是与 Riemann 度量密切相关的联络，即满足下列附加条件的所谓 **Levi-Civita 联络**：对任何向量场 X, Y, Z，有

$$\begin{aligned}&\text{(i) } X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle;\\&\text{(ii) } \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].\end{aligned}\tag{3.1}$$

对此，有所谓 Riemann 几何的基本定理(定理 3.1).

定理 3.1 *Riemann 流形 M 上总存在唯一的 Levi-Civita 联络.*

证明 为证明唯一性，我们只要说明对任何切向量场 X, Y 和 Z，$\langle\nabla_X Y, Z\rangle$ 是确定的. 反复利用 Levi-Civita 的条件(i)和(ii)，我们有

$$\begin{aligned}\langle\nabla_X Y, Z\rangle &= X\langle Y, Z\rangle - \langle Y, \nabla_X Z\rangle\\&= X\langle Y, Z\rangle - \langle Y, \nabla_Z X\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle\\&= X\langle Y, Z\rangle - Z\langle Y, X\rangle + \langle\nabla_Z Y, X\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= X\langle Y, Z\rangle - Z\langle Y, X\rangle + \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle [Z, Y], X\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle \\
&= X\langle Y, Z\rangle - Z\langle Y, X\rangle + Y\langle Z, X\rangle - \langle Z, \nabla_Y X\rangle + \langle [Z, Y], X\rangle \\
&\quad - \langle Y, [X, Z]\rangle \\
&= X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle Y, X\rangle \\
&\quad - \langle Z, \nabla_X Y\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle + \langle [Z, Y], X\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle.
\end{aligned}
$$

据此得到

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\{&X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\
&- \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle\}.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

另一方面,我们用(3.2)式定义$\nabla_X Y$. 容易验证它必定是 Levi-Civita 联络.

证讫

现在我们来给出 Levi-Civita 联络的局部表达式. 设 U 为坐标领域,坐标为 $(x^1, \cdots, x^m)$, $\frac{\partial}{\partial x^i}(1 \leqslant i \leqslant m)$ 是坐标曲线的切向量,那么, $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle$. 令

$$
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},
$$

其中 Γ_{ij}^k 称为克式记号(Christoffel, 1869),它可表达为

$$
\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right),
\tag{3.3}
$$

其中(g^{ij})是(g_{ij})的逆矩阵.

注意到(3.3)式是(3.2)式的特殊情形.

对任何联络∇和 M 上的曲线 c 以及沿曲线的向量场 X,如果 $\nabla_{\dot{c}} X = 0$, 那么称 X 沿曲线 c **平行移动**. 它定义了对应切空间的线性同构.

习题 设 $c:[a, b] \to M$ 是 M 上的光滑曲线,∇是 Levi-Civita 联络. 那么,对任何 $X \in T_{c(a)}M$, 存在唯一的向量场 $X(t) \in T_{c(t)}M$, 使 $X(t)$是沿曲线 c 平行移动,并满足 $X(a) = X$.

Levi-Civata 联络的条件(3.1)中的第二个条件是无挠联络的条件. 现在来考察第一个条件的几何意义.

Riemann 流形中的 Levi-Civita 联络定义了度量空间之间的等距同构. 事实上,设 $\gamma:[a, b] \to M$ 是 M 上的光滑曲线,并且, $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$. 如果 $\{e_1, \cdots, e_m\}$是点 p 切空间 T_pM 的单位正交基,将 e_i 沿 γ 平行移动,我们得到

$e_i(t)$,那么

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle e_i(t),\ e_j(t)\rangle &= \dot{\gamma}(t)\langle e_i(t),\ e_j(t)\rangle \\ &= \langle \nabla_{\dot{\gamma}(t)} e_i(t),\ e_j(t)\rangle + \langle e_i(t),\ \nabla_{\dot{\gamma}(t)} e_j(t)\rangle = 0.\end{aligned}$$

所以,对任何 $t \in [a,\ b]$, 有

$$\langle e_i(t),\ e_j(t)\rangle = \delta_{ij}.$$

以 $\mathcal{P}^\gamma: T_pM \to T_qM$ 表示沿 γ 的平行移动,则 $\mathcal{P}^\gamma(e_i) = e_i(b)$. 这说明$\mathcal{P}^\gamma$ 将 T_pM 的单位正交基映到 T_qM 的单位正交基. 所以,平行移动$\mathcal{P}^\gamma$ 是度量空间之间的等距同构.

反之,设 M 上的一条曲线$\gamma:[0,\ 1] \to M$使$\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$,且$\dot{\gamma}(0) = X(p)$, 这里 X, Y, Z 是任何切向量场. 记$\mathcal{P}^\gamma$ 是 T_pM 和 T_qM 间的同构,且设 $\{e_i(t)\}$是用平行移动得到的沿 γ 的单位正交基. 我们有 $Y(\gamma(t)) = Y^i(t)e_i(t)$, $Z(\gamma(t)) = Z^i(t)e_i(t)$, 那么

$$\begin{aligned}X(p)\langle Y,\ Z\rangle = \dot{\gamma}(0)\langle Y,\ Z\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i Y^i(t)Z^i(t)\,\Big|_{t=0} \\ &= \sum \frac{\mathrm{d}Y^i}{\mathrm{d}t}(0)Z^i(0) + \sum Y^i(0)\frac{\mathrm{d}Z^i}{\mathrm{d}t}(0) \\ &= \langle \nabla_{\dot{\gamma}(0)}Y,\ Z\rangle + \langle Y,\ \nabla_{\dot{\gamma}(0)}Z\rangle \\ &= \langle \nabla_{X(p)}Y,\ Z\rangle + \langle Y,\ \nabla_{X(p)}Z\rangle.\end{aligned}$$

上述分析说明,Riemann 流形中的 Levi-Civita 联络是保持度量的联络.

4 曲率张量

对向量丛上的联络,总可定义曲率. 而在 Riemann 几何中的曲率是关于它切丛上 Levi-Civita 联络的曲率张量. 曲面论中重要的内蕴几何量是 Gauss 曲率. 它在 Riemann 几何中的推广是截面曲率,它可由曲率张量来定义. 进而可定义 Ricci 曲率,数量曲率. 从曲率张量出发还可定义曲率算子、复截面曲率等. 如果流形还有复结构,还可定义全纯截曲率、全纯双截曲率等. 这里先引进曲率张量,并给出它的性质,再引入上述各种曲率. 对曲率的理解,以及它们和其他几何不变量或拓扑不变量的关系是微分几何中的重要课题.

设 M 是 Riemann 流形,具 Levi-Civita 联络. 定义相应的**曲率张量(curvature tensor)**如下:

$$R(X, Y)Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \tag{4.1}$$

其中 X, Y, Z 是 M 上的向量场.

命题 4.1 *$R(X, Y)Z$ 在 $p \in M$ 的值仅依赖于 X_p, Y_p 和 Z_p,而不依赖于那些向量在点 p 附近的值. 进而,对应*

$$X_p, Y_p, Z_p \to R(X_p, Y_p)Z_p$$

关于每个变量是线性的.

证明 对 M 上的任何函数 f,有

$$\begin{aligned}
-\nabla_{fX} \nabla_Y Z &= -f \nabla_X \nabla_Y Z, \\
\nabla_Y \nabla_{fX} Z &= \nabla_Y (f \nabla_X Z) = Y(f) \nabla_X Z + f \nabla_Y \nabla_X Z, \\
\nabla_{[fX, Y]} Z &= \nabla_{\nabla_{fX} Y} Z - \nabla_{\nabla_Y fX} Z = f \nabla_{\nabla_X Y} Z - \nabla_{Y(f) X} Z - f \nabla_{\nabla_Y X} Z \\
&= f \nabla_{[X, Y]} Z - Y(f) \nabla_X Z.
\end{aligned}$$

将上面 3 式两边分别相加给出

$$R(fX, Y)Z = fR(X, Y)Z.$$

对 R 的变量 Y, Z 的情形也同样证明,这里略去而留给读者作为练习.

现在设 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Z = Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. 那么

$$R(X, Y)Z = X^i Y^j Z^k R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

在点 p 取值,有

$$R(X, Y)Z\,|_p = X^i(p)Y^j(p)Z^k(p)R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_p,$$

它只依赖于 X^i, Y^j, Z^k 在点 p 的值.

证迄

由这个命题我们知道 R 是一个张量,称为**曲率张量**. 它具有多种对称性.

命题 4.2 Riemann 流形的曲率张量满足:

$$\begin{aligned}
&\text{(i) } R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0;\\
&\text{(ii) } R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0;\\
&\text{(iii) } \langle R(X, Y)Z, W\rangle + \langle R(X, Y)W, Z\rangle = 0;\\
&\text{(iv) } \langle R(X, Y)Z, W\rangle = \langle R(Z, W)X, Y\rangle.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

证明 性质(i)可从曲率张量的定义直接得到. 至于性质(ii)和性质(iii),只要对坐标曲线切向量证明即可. 而这些向量的 Lie 括号为零. 我们有

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= -\nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z,\\
R(Y, Z)X &= -\nabla_Y\nabla_Z X + \nabla_Z\nabla_Y X,\\
R(Z, X)Y &= -\nabla_Z\nabla_X Y + \nabla_X\nabla_Z Y,
\end{aligned}$$

将上面几式两边分别相加得到

$$(4.2)\text{ 式第二式的左边} = \nabla_X[Z, Y] + \nabla_Y[X, Z] + \nabla_Z[Y, X] = 0,$$

这样性质(ii)得证. 对性质(iii)只要验证 $\langle R(X, Y)Z, Z\rangle = 0$ 即可. 而

$$\begin{aligned}
\langle R(X, Y)Z, Z\rangle &= \langle -\nabla_X\nabla_Y Z, Z\rangle + \langle\nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle\\
&= -X\langle\nabla_Y Z, Z\rangle + \langle\nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle + Y\langle\nabla_X Z, Z\rangle - \langle\nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle\\
&= Y\langle\nabla_X Z, Z\rangle - X\langle\nabla_Y Z, Z\rangle\\
&= \frac{1}{2}(YX\langle Z, Z\rangle - XY\langle Z, Z\rangle)\\
&= \frac{1}{2}[Y, X]\langle Z, Z\rangle = 0.
\end{aligned}$$

这就证明了性质(iii).

从性质(i)、性质(ii)和性质(iii)我们有

$$\begin{aligned}
&\langle R(X,Y)Z,W\rangle+\langle R(Z,X)Y,W\rangle+\langle R(Y,Z)X,W\rangle=0,\\
&\langle R(X,Y)Z,W\rangle+\langle R(W,X)Z,Y\rangle+\langle R(Y,W)Z,X\rangle=0,\\
-&\langle R(Z,X)Y,W\rangle-\langle R(W,Z)Y,X\rangle-\langle R(X,W)Y,Z\rangle=0,\\
-&\langle R(Y,Z)X,W\rangle-\langle R(W,Y)X,Z\rangle-\langle R(Z,W)X,Y\rangle=0.
\end{aligned}$$

将上面几式两边分别相加得

$$2\langle R(X,Y)Z,W\rangle=2\langle R(Z,W)X,Y\rangle.$$

证迄

上面(4.2)式中的第二式称为**第一 Bianchi 恒等式**. 还有下列的**第二 Bianchi 恒等式**(命题 4.3).

命题 4.3 Riemann 流形的曲率张量满足

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W+(\nabla_Y R)(Z,X)W+(\nabla_Z R)(X,Y)W=0, \tag{4.3}$$

其中

$$\begin{aligned}
(\nabla_X R)(Y,Z)W \overset{\text{def}}{=} &\nabla_X R(Y,Z)W-R(\nabla_X Y,Z)W\\
&-R(Y,\nabla_X Z)W-R(Y,Z)\nabla_X W.
\end{aligned}$$

证明 容易验证$(\nabla_X R)(Y,Z)$对每个变量都是线性的. 只要在每个坐标邻域对坐标曲线切向量验证(4.3)式. 不妨假设 X,Y,Z,W 的 Lie 括号为零. 因此,我们有

$$\nabla_X Y=\nabla_Y X,\ R(X,Y)=-\nabla_X\nabla_Y+\nabla_Y\nabla_X. \tag{4.4}$$

由于

$$\begin{aligned}
(\nabla_X R)(Y,Z)W&=\nabla_X R(Y,Z)W-R(\nabla_X Y,Z)W\\
&\quad-R(Y,\nabla_X Z)W-R(Y,Z)\nabla_X W,\\
(\nabla_Z R)(X,Y)W&=\nabla_Z R(X,Y)W-R(\nabla_Z X,Y)W\\
&\quad-R(X,\nabla_Z Y)W-R(X,Y)\nabla_Z W,\\
(\nabla_Y R)(Z,X)W&=\nabla_Y R(Z,X)W-R(\nabla_Y Z,X)W\\
&\quad-R(Z,\nabla_Y X)W-R(Z,X)\nabla_Y W,
\end{aligned}$$

因此,将上面几式两边分别相加且考虑到(4.4)式得到

$$\begin{aligned}
(4.3)\text{ 式的左边}=&-\nabla_X\nabla_Y\nabla_Z W+\nabla_X\nabla_Z\nabla_Y W+\nabla_Y\nabla_Z\nabla_X W-\nabla_Z\nabla_Y\nabla_X W\\
&+\nabla_{\nabla_X Y}\nabla_Z W-\nabla_Z\nabla_{\nabla_X Y}W+\nabla_Y\nabla_{\nabla_X Z}W-\nabla_{\nabla_X Z}\nabla_Y W\\
&-\nabla_Z\nabla_X\nabla_Y W+\nabla_Z\nabla_Y\nabla_X W+\nabla_X\nabla_Y\nabla_Z W-\nabla_Y\nabla_X\nabla_Z W\\
&+\nabla_{\nabla_Z X}\nabla_Y W-\nabla_Y\nabla_{\nabla_Z X}W+\nabla_X\nabla_{\nabla_Z Y}W-\nabla_{\nabla_Z Y}\nabla_X W
\end{aligned}$$

$$-\nabla_Y\nabla_Z\nabla_X W+\nabla_Y\nabla_X\nabla_Z W+\nabla_Z\nabla_X\nabla_Y W-\nabla_X\nabla_Z\nabla_Y W$$
$$+\nabla_{\nabla_Y Z}\nabla_X W-\nabla_X\nabla_{\nabla_Y Z}W+\nabla_Z\nabla_{\nabla_Y X}W-\nabla_{\nabla_Y X}\nabla_Z W$$
$$=0.$$

证迄

从克氏记号的局部表达式(3.3),我们可以得到曲率张量的局部表达式.记 $R\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}=R^r_{kij}\frac{\partial}{\partial x^r}$,那么

$$\begin{aligned}R_{ijkl} &= \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle\\ &= g_{lr}\left(-\frac{\partial\Gamma^r_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial\Gamma^r_{ik}}{\partial x^j}-\Gamma^r_{im}\Gamma^m_{jk}+\Gamma^r_{jm}\Gamma^m_{ik}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j\partial x^k}+\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i\partial x^k}\right]\\ &\quad+\sum_{r,s}g_{rs}(\Gamma^r_{il}\Gamma^s_{jk}-\Gamma^r_{jl}\Gamma^s_{ik}).\end{aligned}\tag{4.5}$$

由此可见曲率张量是度量的二阶几何不变量 $\left(\text{有}\frac{1}{12}n^2(n^2-1)\text{ 个独立分量}\right)$.

在高维空间,曲率张量是一个非常复杂的量.对二维曲面曲率张量只有一个实质分量 R_{1212},而曲面的 Gauss 曲率 κ 可表示为

$$\kappa=\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}.$$

我们现在算两个例子. $\mathbb{R}^3$ 在球面坐标下度量可表示为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\rho^2+\rho^2\mathrm{d}\phi^2+\rho^2\sin^2\phi\mathrm{d}\theta^2.$$

令 $\rho=1$ 得到球面 S^2 的度量为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\phi^2+\sin^2\phi\mathrm{d}\theta^2.$$

设 $X_1=\frac{\partial}{\partial\phi}$, $X_2=\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}$, 那么

$$\langle X_i,X_j\rangle=\delta_{ij},\ [X_1,X_2]=-\cot\phi X_2,$$

$$\nabla_{X_1}X_1=0,\ \nabla_{X_2}X_1=\cot\phi X_2,\ \nabla_{X_1}X_2=0,\ \nabla_{X_2}X_2=-\cot\phi X_1,$$

所以

$$R(X_1,X_2)X_1=X_2.$$

这说明 S^2 的 Gauss 曲率处处是 1.

对 $\mathbb{H}^2$,它的度量为

$$ds^2 = \frac{4}{(1-r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\theta^2).$$

令

$$X_1 = \frac{1-r^2}{2}\frac{\partial}{\partial r}, \ X_2 = \frac{1-r^2}{2r}\frac{\partial}{\partial \theta},$$

那么

$$\langle X_i, X_j\rangle = \delta_{ij}, \ [X_1, X_2] = -\frac{1+r^2}{2r}X_2,$$

并且

$$\nabla_{X_1}X_1 = 0, \ \nabla_{X_2}X_1 = \frac{1+r^2}{2r}X_2, \ \nabla_{X_1}X_2 = 0.$$

从而,$R(X_1, X_2)X_1 = -X_2$, Gauss 曲率处处为-1.

什么是曲面 Gauss 曲率的高维推广呢?我们可以利用 Riemann 度量定义一个四重线性函数,对任何 $X, Y, Z, W \in T_pM$,有

$$G(X, Y, Z, W) = \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle - \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle. \tag{4.6}$$

它具有曲率张量在命题 4.2 中的所有对称性质.注意到

$$\begin{aligned} G(X, Y, X, Y) &= |X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2 \\ &= |X|^2|Y|^2\sin^2\angle(X, Y), \end{aligned}$$

因此,当 X 和 Y 线性无关时,$G(X, Y, X, Y)$正好是切向量 X 和 Y 所张成的平行四边形面积的平方.当然,此时,$G(X, Y, X, Y)\neq 0$.

如果 X'和 Y'是在 X 和 Y 所张成平面 E 上的另外两个向量,那么

$$X' = aX + bY, \ Y' = cX + dY,$$

其中 $ad - bc \neq 0$. 根据命题 4.2 的性质,有

$$\langle R(X', Y')X', Y'\rangle = (ad-bc)^2\langle R(X, Y)X, Y\rangle,$$

$$G(X', Y', X', Y') = (ad-bc)^2 G(X, Y, X, Y).$$

所以

$$\frac{\langle R(X', Y')X', Y'\rangle}{G(X', Y', X', Y')} = \frac{\langle R(X, Y)X, Y\rangle}{G(X, Y, X, Y)}.$$

这说明上式是 T_pM 的二维子空间 E 上的函数，而与 X 和 Y 在 E 中的选取无关.

设 E 是 T_pM 的二维子空间，X 和 Y 是 E 中任意两个线性无关切向量，则定义

$$\kappa(E) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y\rangle}{G(X, Y, X, Y)}, \tag{4.7}$$

它称为 Riemann 流形 M 在(p, E)的**截面曲率(sectional curvature)**. 我们看到截面曲率在流形 M 中的每一点不是一个确定的值，而是每一点切空间的所有二维子空间组成的 Grassmann 流形 $G_{m-2, 2}$ 上的函数.

截面曲率和曲率张量的关系如何呢？从定义可见截面曲率由曲率张量所决定. 反过来，曲率张量也可由截面曲率所确定. 我们有下列结果.

命题 4.4(E. Bompiani, 1924) *Riemann 流形 M 在点 p 的曲率张量由在该点的所有二维切平面上的截面曲率唯一确定.*

证明 设有 M 上的四重线性函数$\overline{R}(X, Y, Z, W)$满足命题 4.2 的所有对称性质，并且对在点 p 的任意两个线性无关的切向量 X, Y，有

$$\frac{\langle \overline{R}(X, Y)X, Y\rangle}{G(X, Y, X, Y)} = \frac{\langle R(X, Y)X, Y\rangle}{G(X, Y, X, Y)}. \tag{4.8}$$

我们只要证明，对任意 $X, Y, Z, W \in T_pM$，有

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, W\rangle = \langle R(X, Y)Z, W\rangle.$$

为此，令

$$S(X, Y, Z, W) = \langle \overline{R}(X, Y)Z, W\rangle - \langle R(X, Y)Z, W\rangle.$$

显然 S 具有命题 4.2 的所有性质. 从(4.8)式，我们有

$$S(X, Y, X, Y) = 0. \tag{4.9}$$

据此

$$S(X+Z, Y, X+Z, Y) = 0.$$

根据 S 的对称性得到

$$S(X, Y, Z, Y) = 0.$$

从而

$$S(X, Y+W, Z, Y+W) = 0.$$

展开后得

$$S(X, Y, Z, W) + S(X, W, Z, Y) = 0. \tag{4.10}$$

利用对称性又有

$$\begin{aligned} S(X, Y, Z, W) &= -S(X, W, Z, Y) \\ &= S(X, W, Y, Z) \\ &= -S(X, Z, Y, W) \\ &= S(X, Z, W, Y). \end{aligned} \tag{4.11}$$

根据命题 4.2 的性质(ii),有

$$S(X, Y, Z, W) + S(X, Z, W, Y) + S(X, W, Y, Z) = 0.$$

由(4.11)式即得

$$3S(X, Y, Z, W) = 0.$$

证迄

如果在点 p 的截面曲率 $\kappa(E)$ 是常数,则记成 $\kappa(p)$. 从命题 4.4 可知,点 p 此时的曲率张量为

$$\langle R(X, Y)Z, W\rangle = \kappa(p)(\langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle - \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle).$$

进而,截面曲率在整个流形的连通分支上是常数的流形称为**常曲率空间**.

习题(F. Schur Theorem) 设 M 是 m 维连通的 Riemann 流形. 如果 $m \geqslant 3$, 且截面曲率只是流形 M 上的函数,那么 M 是常曲率空间.

除了截面曲率,从 Riemann 曲率张量还可导出 **Ricci 曲率**和**数量曲率**.

设 $\{e_i\}$ 是切空间 T_pM 上的单位正交基,且 $X \in T_pM$ 是单位向量,那么,沿 X 方向的 Ricci 曲率定义为

$$\langle \mathrm{Ric}X, X\rangle = \langle R(e_i, X)e_i, X\rangle.$$

由此可见 Ric 是 M 上的二阶对称共变张量.

M 上的数量曲率定义为

$$s = \langle \mathrm{Ric}e_i, e_i\rangle = \langle R(e_j, e_i)e_j, e_i\rangle,$$

它是 M 上的函数.

如果 M 上的 Ricci 曲率只与 M 上的点有关而与方向无关,那么,M 称为

Einstein 流形. 显然，m 维 Einstein 流形的 Ricci 曲率为$\frac{s}{m}$. 任何 2 维流形都是 Einstein 流形. 当 $m \geqslant 3$ 时，Einstein 流形的数量曲率是常数. 从常曲率空间的定义立即可得它一定是一个 Einstein 流形.

设 M 是 n 维 Riemann 流形，它在点 p 的切空间为 T_pM. 在点 p 的**曲率算子**为切空间的二次外积空间 $\Lambda^2 T_pM$ 上的自共轭线性映照$\mathcal{R}: \Lambda^2 T_pM \to \Lambda^2 T_pM$，对 $x, y, u, v \in T_pM$，定义为

$$\langle \mathcal{R}(x \wedge y), u \wedge v \rangle = \langle R(x, y)u, v \rangle.$$

如果$\mathcal{R}$的特征值都是正的，我们说 M 有**正曲率算子**.

Riemann 度量$\langle , \rangle$可被延拓为 $T_pM \otimes \mathbb{C}$ 上的一个复双线性形$(,)$，以及一个 Hermitian 内积$\ll , \gg$. 类似地，在 $\Lambda^2 T_pM$ 上的 Riemann 度量也能以这两种方式延拓到 $\Lambda^2 T_pM \otimes \mathbb{C}$.

我们将曲率算子延拓为复线性映照 $\mathcal{R}: \Lambda^2 T_pM \otimes \mathbb{C} \to \Lambda^2 T_pM \otimes \mathbb{C}$，并且对每个截面 $\sigma \subset T_pM \otimes \mathbb{C}$，我们对应一个**复截面曲率** $K(\sigma)$，它是实数，定义为

$$K(\sigma) = \frac{\ll \mathcal{R}(z \wedge w), z \wedge w \gg}{\| z \wedge w \|^2},$$

其中$\{z, w\}$是 σ 的一组基.

一个元素 $z \in T_pM \otimes \mathbb{C}$，如果满足 $(z, z) = 0$，称为迷向的. 如果复线性子空间 $V \subset T_pM \otimes \mathbb{C}$ 中的任一元素 $z \in V$ 都是迷向的，$(z, z) = 0$，则它就称为**全迷向子空间**.

定义 4.5 对任何点 $p \in M$ 和全迷向平面 $\sigma \subset T_pM \otimes \mathbb{C}$，如果 $K(\sigma) > 0$，那么，Riemann 流形 M 称为具有**正全迷向截曲率的流形**.

现在我们来考察正全迷向截曲率的条件. 如果 σ 是 $T_pM \otimes \mathbb{C}$ 的二维全迷向子空间，那么，存在 σ 的一组基$\{z, w\}$，使得

$$z = e_1 + ie_2, \quad w = e_3 + ie_4,$$

其中 $e_1, \cdots, e_4$ 是单位正交切向量. 由于

$$z \wedge w = (e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4) + i(e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3),$$

据此展开 $K(\sigma)$的分子部分，得到

$$\begin{aligned} \ll \mathcal{R}(z \wedge w), z \wedge w \gg &= \langle \mathcal{R}(e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4), e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4 \rangle \\ &\quad + \langle \mathcal{R}(e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3), e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3 \rangle \\ &= R_{1313} + R_{2424} + R_{1414} + R_{2323} - 2R_{1324}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

当维数$\geqslant 4$时,有各种蕴含正全迷向截曲率的条件.从上式第一个等式可见曲率算子$\mathcal{R}$是正定的条件就蕴含正全迷向截曲率的条件.

我们再来考察它和曲率夹条件的关系.对任何$p \in M$和所有实二维平面$\sigma \subset T_pM$,如果存在M上正函数$\mathcal{C}$,使截面曲率$\kappa(\sigma)$满足

$$\delta\,\mathcal{C}(p) \leqslant \kappa(\sigma) \leqslant \mathcal{C}(p),$$

那么,我们说M的截面曲率是**逐点δ-夹的**,这里$0<\delta\leqslant 1$.如果$\mathcal{C}$是常数,这就称为**整体夹的**.如果其中一个不等式是严格的,就称为严格的.假定M的截面曲率是**严格逐点$\frac{1}{4}$-夹**.那么,(4.12)式中开头4项的每项是严格大于$\frac{1}{4}\mathcal{C}(p)$,而Berger[[1],p.69]的一个不等式说明

$$|R_{1324}| \leqslant \frac{1}{2}\mathcal{C}(p).$$

所以,从(4.12)式得到

$$\ll \mathcal{R}(z \wedge w),\ z \wedge w \gg > 0,$$

这也就是说,截面曲率严格逐点$\frac{1}{4}$-夹的条件蕴含着正全迷向截曲率.

如果Riemann流形M还具有复结构,对复结构不变的平面的截曲率称为全纯截曲率.更一般的可定义全纯双截曲率.这些都是复几何中的常用曲率,具体定义参阅复几何方面的书籍.

5 测地线，指数映照，测地凸邻域

流形上有了联络就可定义平行性，从而可讨论自平行曲线，这就是测地线. 它是流形中最重要的曲线. 本节讨论 Riemann 流形中的测地线，给出它的微分方程，它还是几何变分问题的解. 我们推导曲线弧长的第一变分公式，据此可证明测地线的局部极小性. 从测地线还可引进指数映照、法坐标. 利用指数映照可说明在小范围内，任何两点存在唯一测地线，进而可说明测地凸邻域的存在性.

设 M 是 Riemann 流形，具 Levi-Civita 联络 ∇，$\gamma:[0,\ 1]\to M$ 是 M 上的曲线. 如果它的切向量 $\dot\gamma$ 沿着 γ 平行移动，即 $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$，那么 γ 称为**测地线(geodesic)**.

此时，$|\dot\gamma|$ 是常数. 注意到对任何正常数 c，令 $\gamma^c(t)\equiv\gamma(ct)$，$0\leqslant t\leqslant\frac{1}{c}$，我们仍然有 $\nabla_{\dot\gamma^c}\dot\gamma^c = 0$，然而 $|\dot\gamma^c| = c|\dot\gamma|$，所以，我们可假定测地线 γ 总有 $|\dot\gamma| = 1$. 它的几何意义如下.

设 $\gamma:[a,\ b]\to M$ 是任一光滑曲线，它的长度为

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t.$$

令 $s:[a,\ b]\to[0,\ L(\gamma)]$ 定义为

$$s(t) = \int_a^t |\dot\gamma(u)|\,\mathrm{d}u.$$

如果 γ 是浸入曲线，$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\dot\gamma| > 0$，那么，存在光滑逆函数

$$t:[0,\ L(\gamma)]\to[a,\ b],$$

使 $\tilde\gamma(s) = \gamma(t(s)):[0,\ L(\gamma)]\to M$ 是曲线 γ 的新参数，并且，$|\dot{\tilde\gamma}| = 1$.

另一方面，如果 $\gamma:[0,\ c]\to M$，满足 $|\dot\gamma| = 1$，那么，对任何 $s\in[0,\ c]$，有 $s = L(\gamma|_{[0,\ s]})$. 所以，$|\dot\gamma| = 1$ 是弧长参数的充要条件.

在局部坐标下，有

$$\gamma(t) = (\gamma^1(t),\ \cdots,\ \gamma^n(t)),\ \dot\gamma = \dot\gamma^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

那么,我们有测地线微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\gamma^i}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}\gamma^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\gamma^k}{\mathrm{d}t}=0. \tag{5.1}$$

这是二阶非线性常微分方程组.根据常微分方程理论中的有关定理(见下列附注),它对任何初始条件$(\gamma^1(0), \cdots, \gamma^m(0))$和$(\dot{\gamma}^1(0), \cdots, \dot{\gamma}^m(0))$的解是存在并且唯一的.我们有下述命题.

命题 5.1 设 $x\in M$ 是 Riemann 流形 M 中任一点,$v\in T_xM$ 是任一向量.那么,局部地存在唯一条测地线 γ,使 $\gamma(0)=x$, $\dot{\gamma}(0)=v$.

附注 设

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}=F\left(u, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right),$$

其中 u 表示$(u^1, \cdots, u^n)$,F 表示定义在 $U\subset\mathbb{R}^{2n}$ 上 n 个光滑函数的 n 维向量.将它化为一阶方程,可以证明存在 $2n$ 维的邻域 W 和 $\varepsilon>0$, 对 $(u_0, v_0)\in W$ 使上述方程有唯一解 $u(t)$, $|t|<\varepsilon$ 且满足

$$u(0)=u_0, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=v_0.$$

并且,解光滑地依赖于初始条件,即 $(u_0, v_0, t)\to u(t)$ 在 $W\times(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上是光滑的.证明的具体细节请见常微分方程的教程.

过 Riemann 流形上任何两点是否存在测地线呢? 我们首先可以说明当这两点充分接近时回答是肯定的.

为此,下面我们用测地线来讨论重要的指数映照.设 $x\in M$ 是任意一点,且 $v\in T_xM$ 表示在点 x 给定的切向量,γ_v 表示从点 x 出发的以 v 为初始切向量的测地线.如果 $y\in\gamma_v$ 是测地线上一点,使 x 和 y 沿 γ_v 的距离正好是$|v|$,那么,定义 $\exp_x v=y$. 直观可见,在 T_xM 中存在 0 的一个邻域 ◎,在这个邻域中指数映照是有意义的.

我们从测地线方程(5.1)出发,对指数映照作严格的定义.

方程组(5.1)是常微分方程组.从常微分方程组的一般理论可知,对任何 $x\in M$ 和任何给定的 $\varepsilon>0$, 存在 x 在 M 中的一个邻域 U' 和 $\delta>0$, 使对任何 $y\in U'$ 和 $v\in T_yM$, $|v|<\delta$ 存在唯一的测地线 $\gamma_v:\dot{\gamma}_v(0)=v$, 它的邻域包含 $[0, \varepsilon]$,即 $\gamma_v:[0, \varepsilon]\to M$ 是有意义的.

注意到 $\xi_v=\gamma_v(\varepsilon t)$ 也定义测地线并且有性质: $\dot{\xi}_v(0)=\varepsilon v$(由唯一性得 $\gamma_v(\varepsilon t)=\gamma_{\varepsilon v}(t)$), 并且 ξ_v 定义在$[0, 1]$上.所以,在上述结论中,可用 $\varepsilon\delta$ 代替 δ 而得到下述引理.

引理 5.2 对任何 $x \in M$,存在点 x 的一个邻域 $U \subset M$ 和 $\omega > 0$,使对任何 $y \in U$, $v \in T_yM$, $|v| \leqslant \omega$,存在唯一的测地线 γ_v,使 $\dot{\gamma}v(0) = v$,并且 γ_v 的定义域包含[0, 1].

这样,我们可严格地定义**指数映照(exponential map)**.设

$$B_x(\omega) = \{v \in T_xM, \ |v| < \omega\}.$$

对 $v \neq 0 \in B_x(\omega)$,有

$$\exp_x v \overset{\text{def}}{=} \gamma_v(1), \text{而} \exp_x 0 \overset{\text{def}}{=} x.$$

设 $\mathcal{U} = U \times B_y(\omega) \in TM$ 为开集.对任何 $(y, v) \in \mathcal{U}$,定义

$$\exp(y, v) = \exp_y v.$$

易见 $\exp: \mathcal{U} \to M$ 是有意义的.又根据常微分方程中解关于初始条件的光滑依赖性知,exp 是一个光滑映照.特别地,$\exp_x: B_x(\omega) \to M$ 是光滑的.事实上,它是局部微分同胚.对 $v \in T_0(T_xM) = T_xM$, $|v| < \omega$,设 $\tilde{\gamma}(t) = tv$ 是 T_xM 上的直线,那么

$$\exp_x \tilde{\gamma}(t) = \exp_x tv = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t),$$

所以

$$(\mathrm{d} \exp_x)_0 v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp_x tv) \mid_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_v(t) \mid_{t=0} = v.$$

从而$(\mathrm{d} \exp_x)_0$是非奇异的.从隐函数定理知 $\exp_x$ 是局部微分同胚.

设 $(x_0, 0) \in TM$ 是切丛上一点.上面的讨论说明在$(x_0, 0)$的某一邻域 $\mathcal{U} = \{(x, v), x \in U, v \in T_xM, |v| \leqslant \omega\}$ 中定义可微映照 $\exp(x, v) = \exp_x v$.现在考虑映照 $F: \mathcal{U} \to M \times M$.它的定义如下:

$$F(x, v) = (x, \exp_x v).$$

设$\mathcal{U}$中的局部坐标为$(x^1, \cdots, x^m; v^1, \cdots, v^m)$,而 $U \times U \subset M \times M$ 中的局部坐标为$(x_1^1, \cdots, x_1^m; x_2^1, \cdots, x_2^m)$.我们有

$$\mathrm{d}F\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\bigg|_{(x,0)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^i}(x, \exp_x v)\bigg|_{(x,0)} = \frac{\partial}{\partial x_1^i} + \frac{\partial}{\partial x_2^i},$$

$$\mathrm{d}F\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right)\bigg|_{(x,0)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v^i}(x, \exp_x v)\bigg|_{(x,0)} = (\mathrm{d} \exp_x)\frac{\partial}{\partial v^i} = \frac{\partial}{\partial x_2^i}.$$

因此,F 在$(x, 0)$的 Jacobi 矩阵是

$$\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

它是非奇异的. 由隐函数定理知,F 将$(x, 0)$的某邻域$\mathcal{V} \subset \mathcal{U} \subset TM$ 微分同胚地映照到(x, x)在 $M \times M$ 中的某邻域. 取 x 在 M 中的较小开邻域 W,使 $F(\mathcal{V}) \supset W \times W$. 这就证明了下列定理.

定理 5.3 对任何 $x \in M$,存在它在 M 中的邻域 W 和 $\varepsilon > 0$,使

(i) W 中任何两点可用长度小于 ε 的唯一测地线相连接;

(ii) 该测地线光滑地依赖于两点(即,如果,$t \to \exp_{q_1} tv$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ 是连接 q_1 和 q_2 的测地线,那么,$(q_1, v) \in TM$ 光滑地依赖于(q_1, q_2));

(iii) 对任何 $q \in W$,映照 $\exp_q$ 将 T_qM 中的 ε 球微分同胚地映照到开集 $U_q \supset W$.

现在,我们研究测地线的变分性质. 考虑给定曲线 $\gamma_0 = \gamma$ 的单参数曲线族 $(t, u) \to \gamma_u$, $a \leqslant t \leqslant b$, $0 \leqslant u \leqslant \varepsilon$. 设 $U = \gamma_{u*}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)$ 是横截向量场,T 是 γ_u 的切向量场. 不妨假设 $|\dot{\gamma}_u| = C_u$ 是常数. 那么,曲线 γ_u 的长度为

$$L(u) = \int_a^b |\dot{\gamma}_u(t)| \mathrm{d}t,$$

并且

$$L'(u) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\sqrt{\langle \dot{\gamma}_u(t), \dot{\gamma}_u(t) \rangle}\mathrm{d}t. \tag{5.2}$$

注意到

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\sqrt{\langle \dot{\gamma}_u(t), \dot{\gamma}_u(t) \rangle} &= U\sqrt{\langle T, T \rangle} \\ &= \frac{1}{|T|}\langle \nabla_U T, T \rangle \\ &= \frac{1}{|T|}\langle \nabla_T U, T \rangle. \end{aligned} \tag{5.3}$$

将(5.3)式代入(5.2)式得到

$$\begin{aligned} L'(0) &= \int_a^b \frac{1}{|\dot{\gamma}|}\langle \nabla_T U, T \rangle \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \frac{1}{|\dot{\gamma}|}(T\langle T, U \rangle - \langle U, \nabla_T T \rangle)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{C_0}\int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle T, U \rangle - \langle U, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \rangle\right)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$= \frac{1}{C_0}\langle \dot{\gamma},\, U\rangle \Big|_a^b - \frac{1}{C_0}\int_a^b \langle \nabla_{\dot{\gamma}}\, \dot{\gamma},\, U\rangle \mathrm{d}t.$$

这就是**弧长的第一变分公式**. 当单参数曲线族具固定端点时,我们有 $U(a) = U(b) = 0$. 这样,我们得到下述命题.

命题 5.4　曲线 $\gamma:[a, b] \to M$ 是测地线的充要条件为它是弧长泛函并具固定端点变分$\{\gamma_u\}$的临界点. 测地线方程(5.1)是具固定端点时弧长泛函的 Euler-Lagrange 方程. 特别地,两点之间的弧长最短曲线一定是光滑测地线.

从定理 5.3 和上述测地线的变分特征立即可得测地线的局部极小性(定理 5.5).

定理 5.5　设 W 和 ε 如定理 5.3. 假定 $\gamma:[0, 1] \to M$ 是 W 中长度小于 ε 的测地线,而 $\omega:[0, 1] \to M$ 是连接相同两点的分段光滑曲线. 那么

$$\int_0^1 \left| \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \left| \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t,$$

其中等号成立的充要条件是点集 $\omega([0, 1])$ 和点集 $\gamma([0, 1])$ 相重合.

我们还有下列重要的 **Gauss 引理**(定理 5.6).

定理 5.6　设 $q = \gamma(0)$ 且记定理 5.3 中的 W 为 U_q. 对 $r_0 < \varepsilon$,令 $S(r_0) = \{v \in T_qM,\ |v| = r_0\}$. 记 $S_{r_0} = \exp_q S(r_0)$ 为半径为 r_0 的测地球面. 那么,径向测地线正交于 S_{r_0}.

证明　任取 $y \in S_{r_0}$ 和 $Y \in T_yS_{r_0}$. 在 S_{r_0} 上作曲线 $\xi:[0, \varepsilon] \to S_{r_0}$,使 $\xi(0) = y$, $\xi'(0) = Y$. 令 q 和 y 间的径向测地线为 γ_0.

作单参数曲线族 $\gamma_u(t):[0, \varepsilon] \times [a, b] \to M$,使 $\gamma_0(t) = \gamma$, $\gamma_u(a) = q$, $\gamma_u(b) = \xi(u)$,即 $\gamma_u(t)$是连接 q 和 $\xi(u)$的曲线族. 它的横截向量场为 U 满足:

$$U(a) = \frac{\partial}{\partial u}\gamma_u(t)\Big|_{t=a,\ u=o} = 0,$$

$$U(b) = \frac{\partial}{\partial u}\gamma_u(t)\Big|_{t=b,\ u=o} = \xi'(0) = Y.$$

从定理 5.3 可知,γ 是连接 q 和 y 的唯一测地线,也是 $\gamma_u(t)$中长度最短的曲线. 从第一变分公式(5.4),我们有

$$L'(0) = \frac{1}{C_0}\langle \dot{\gamma}(b),\, Y\rangle = 0.$$

由于 Y 是任意的,这就证明了径向测地线正交于 S_{r_0}.

证讫

定理 5.3 和定理 5.4 说明,在 Riemann 流形的任何一点附近都有一个邻域 W,其中任何两点必可被唯一的极小测地线相连接. 一个自然的问题就是该测地线是否落在 W 中? 如果 W 满足这样的性质,它就称为**测地凸邻域**. 我们将证明这样的凸邻域一定存在. 为此,先证明下列引理.

引理 5.7 设 $x \in M$ 是任意一点,那么必存在 $\varepsilon > 0$,使对任意的 $0 < r < \varepsilon$,测地球面 $S_r(x)$ 有如下性质:与 $S_r(x)$ 相切的任一测地线 γ,它在切点的一个邻域内除切点外都严格地落在 $B_r(x)$ 的外部.

附注 具有引理 5.7 性质的测地球称为局部凸的. 上述引理告诉我们对 Riemann 流形中的任何一点,均存在以它为中心的局部凸测地球. 在欧氏空间中,局部凸和凸是一样的,但在一般 Riemann 流形中,局部凸并不一定是凸的. 如在平坦圆柱面上,半径超过半周长的测地球局部凸而不凸,因为它包含了有两条测地线通过的对径点.

证明 设 W 是 x 点的邻域,有如定理 5.3 的性质. 对任何点 $q \in W$, $\gamma_{q,v}(t)$ 为过点 q 并且沿方向 v 的测地线, $\gamma_{q,v}(0) = q$, $\dot{\gamma}_{q,v}(0) = v$, $|v| = 1$. 对固定的 q, v,有

$$\gamma_{q,v}(t) = \exp_x u(t),$$

其中 $u(t)$ 是 T_xM 中的曲线. 显然,当 $q = x$ 时, $u(t) = vt$. 定义

$$F(t, q, v) = |u(t)|^2 = |\exp^{-1}(\gamma_{q,v}(t))|^2.$$

它显然是可微函数,它表示从 x 到 $\gamma_{q,v}(t)$ 测地线长度的平方.

我们有

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2\langle u(t), u'(t)\rangle,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 2\langle u(t), u''(t)\rangle + 2\langle u'(t), u'(t)\rangle.$$

因此

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right|_{(0,x,v)} = 2|v|^2 = 2 > 0.$$

由连续性,存在点 x 的邻域 $V \subset W$,使对任何 $q \in V$, $v \in T_qM$, $|v| = 1$,我们有 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right|_{t=0} > 0$. 取 $B_\varepsilon(x) \subset V$,其中 ε 就满足我们的要求.

事实上,对 $r < \varepsilon$,设 $\gamma_{q,v}(t) = \exp_x u(t)$ 是与 $S_r(x)$ 切于 $q = \gamma_{q,v}(0)$ 的测地线. 而 $\gamma_{q,v}(t) = \exp_x u(t)$ 在 $t = 0$ 的切向量为 $(d\exp_x)_{u(0)} u'(o)$. 按假设,

$(\mathrm{d}\exp_x)_{u(0)}u'(o) \in T_qS_r(x)$. 注意到 $S_r(x)$是 T_xM 中半径为 r 的球面在指数映照 $\exp_x$ 下的微分同胚像,因此,$u'(0)$是该球面在 $u(0)$的切向而与该点的径向向量 $u(0)$正交(见图 5.1). 这样,我们有

$$\left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{t=0} = 2\langle u(0),\ u'(0)\rangle = 0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 F}{(\partial t)^2}\right|_{t=0} > 0.$$

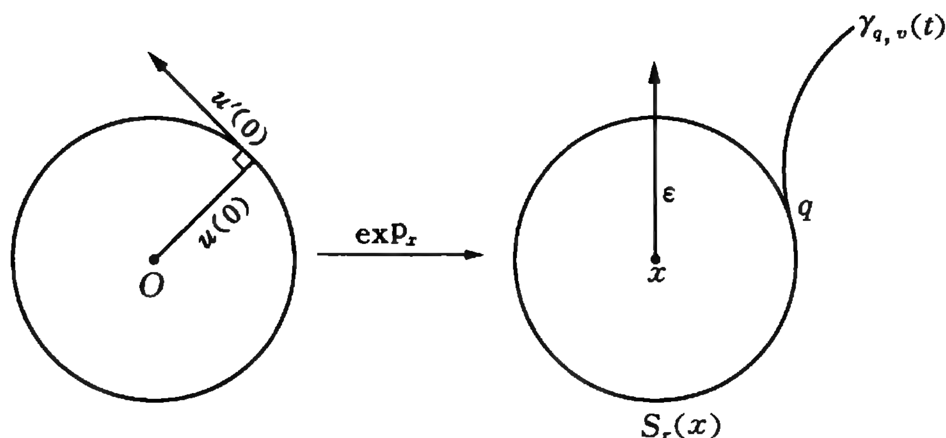


图 5.1

这意味着 F 在 $t=0$ 达到局部极小值,而

$$F(0,\ q,\ v) = r^2.$$

所以,对充分小的 $t \neq 0$, $F(t,\ q,\ v) > r^2$. 这说明 $\gamma_{q,v}(t)$在 $t=0$ 的附近落在 $B_r(x)$的外部.

证迄

定理 5.8(测地凸邻域的存在性,J. H. C. Whitehead, 1932) Riemann 流形 *M 的每一点 x 都存在一个以 x 为中心的凸的测地球 $B_C(x)$,即 $B_C(x)$中的任何两点能用完全落在 $B_C(x)$中的唯一极小测地线相连接.*

证明 见图 5.2,首先,对任何 $x \in M$, 存在 $x \in W$ 和 ε_1,使在 W 中任何两点都能用长度小于 ε_1 的测地线相连接. 又设 ε 是满足引理 5.7 的正数. 取 $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ 并且取 $C < \varepsilon_1$, 使 $B_C(x) \subset W$.

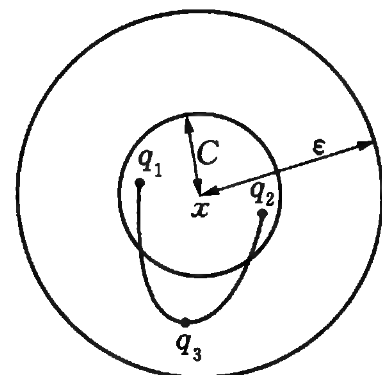


图 5.2

那么,$B_C(x)$中的任何两点 q_1 和 q_2 必能用长度小于 ε_1 的测地线 γ 相连接. 首先,$\gamma \subset B_\varepsilon(x)$. 否则,$\gamma$ 中有两段落在 $B_C(x)$和 $B_\varepsilon(x)$之间. 它们的长度和大于

等于 $2(\varepsilon-C)$，$2(\varepsilon-C)>2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon>2\varepsilon_1$，而与 γ 的长度小于 ε_1 相矛盾. 进而，如果有一点在 $B_C(x)$外，那么，从 x 到测地线 γ 的距离的最大值必在 γ 的内点达到，即存在 $q_3\in\gamma$，$q_3\neq q_1$，q_2. 设连接 x 和 q_3 的测地线长度为 η，那么 γ 切于 $S_\eta(x)$并且落在 $B_\eta(x)$内. 这与引理 5.7 相矛盾.

证迄

利用指数映照，可以定义 Riemann 流形中特别的坐标邻域. 对每一点 $x\in M$，存在 ω，使 $\exp_x:B_x(\omega)\to M$ 是微分同胚，其中 $B_x(\omega)=\{v\in T_xM,\ |v|<\omega\}$. 这样，$T_xM$ 中的坐标 v^i(关于幺正基$(e_1,\cdots,e_m)$)可看成 $\exp_x(B_x(\omega))$中的坐标. 过 T_xM 原点的直线 $v^i=a^it$ 表示了测地线 $\exp_x ta^i$. 这样的坐标称为**法坐标**.

在法坐标下 $v^i=a^it$ 满足测地线方程组(4.1)，所以

$$\Gamma_{ij}^k(a^lt)a^ia^j=0.$$

在点 $t=0$，有

$$\Gamma_{ij}^k(0)a^ia^j=0.$$

由 a^i 是任意的，得到

$$\Gamma_{ij}^k(0)=0.$$

又因为 $(\mathrm{d}\exp_x)_0e_i=e_i=\left.\frac{\partial}{\partial v^i}\right|_0$，所以

$$g_{ij}(0)=\left.\left\langle\frac{\partial}{\partial v^i},\frac{\partial}{\partial v^j}\right\rangle\right|_0=\delta_{ij}.$$

运用法坐标，我们可以给出点 x 沿平面 E 的截面曲率的一个几何解释. 它恰好等于从 x 出发并且与 E 相切的测地线构成的 2 维子流形 S 在诱导度量下在点 x 的 Gauss 曲率.

设 M 在点 x 附近的 Riemann 度量为

$$\mathrm{d}s^2=g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j.$$

它在 S 上的诱导度量为

$$\mathrm{d}\bar{s}^2=\bar{g}_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\mathrm{d}u^\beta,\ 1\leqslant\alpha,\beta\leqslant 2,$$

其中

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(u^1,u^2)=g_{\alpha\beta}(u^1,u^2,0,\cdots,0).$$

由于(u^i)和(u^α)分别是M和S在x点的法坐标，因此

$$\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(0)=\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(0)=0.$$

那么，从曲率张量的局部表达式得到

$$\begin{aligned}R_{1212}(x)&=\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1\partial u^2}-\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial(u^2)^2}-\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial(u^1)^2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 \overline{g}_{12}}{\partial u^1\partial u^2}-\frac{\partial^2 \overline{g}_{11}}{\partial(u^2)^2}-\frac{\partial^2 \overline{g}_{22}}{\partial(u^1)^2}\right)=\overline{R}_{1212}(x).\end{aligned}$$

因此，M在(x, E)的截面曲率

$$\kappa(x, E)=\frac{\langle R(e_1, e_2)e_1, e_2\rangle}{G(e_1, e_2, e_1, e_2)}=\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}=\frac{\overline{R}_{1212}}{\overline{g}_{11}\overline{g}_{22}-\overline{g}_{12}^2}=\overline{\kappa}(x).$$

6 完备性

在整体 Riemann 几何的研究中，我们研究流形的几何性质和拓扑性质的关系. 而对 Riemann 流形中的任一条分段光滑的曲线 γ，都可求它的长度 $L(\gamma)$. 由此，可引进距离的概念. 这样，Riemann 流形成为一个距离空间，就有完备性的概念. 对完备的 Riemann 流形，任何两点(不限于它们充分接近)可用极小测地线相连接. 这是 **Hopf-Rinow 定理**的推论. 我们来证明这一重要的定理.

定义 6.1 *设 M 是连通的 Riemann 流形，p, $q \in M$ 是任意两点. 定义函数 $d: M\times M \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 如下：*

$$d(p,\, q) = \inf_{\gamma\in\Gamma} L(\gamma),$$

其中 Γ 是连接 p, q 两点的所有分段光滑曲线组成的集合.

引理 6.2 *函数 d 是 M 上的距离函数，即它满足：*

(i) 对称性：$d(p,\, q) = d(q,\, p)$;

(ii) 正定性：$d(p,\, q) \geqslant 0$ 且等号成立的充要条件是 $p = q$;

(iii) 三角不等式：对任何 p, q, $r \in M$，有

$$d(p,\, q) + d(q,\, r) \geqslant d(p,\, r).$$

证明 (i)和(iii)是显然的. (ii)的第一部分也是显然的. 只要证明当 $p \neq q$ 时 $d(p,\, q) > 0$. 事实上，流形 M 作为 Hausdorff 空间，存在邻域 $p \in U$，使 $q \notin U$. 取点 p 的测地凸邻域 $B_\delta(p) \subset U$. 那么，对连接 p, q 的任一分段光滑曲线 γ，它的长度必有 $L(\gamma) > \delta$，因此

$$d(p,\, q) = \inf_{\gamma\in\Gamma} L(\gamma) \geqslant \delta > 0.$$

证迄

定理 6.3 *Riemann 流形 M，作为距离空间的拓扑与 M 的原来拓扑等价. 所以，d 是 $M\times M$ 上的连续函数.*

证明 M 作为流形的拓扑由它的每一点 $p \in M$ 的测地凸邻域 $B_\varepsilon(p)$ 所决定. 而 $B_\varepsilon(p)$ 中任何两点只能用唯一的极小测地线相连接. 从距离函数的定义立即知道

$$B_\varepsilon(p) = \{q \in M,\ d(p,\ q) < \varepsilon\}.$$

它恰好是 M 作为距离空间时点 p 附近的邻域. 这就证明了定理.

证迄

在距离空间的研究中有完备性的概念. 它在整体 Riemann 几何的研究中起很重要的作用, Riemann 几何中的重要定理极大多数都是对完备 Riemann 流形而言的.

定义 6.4 设$\{x_n\}$是距离空间 M 中的一个点列, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N(\varepsilon) > 0$, 当 $n,\ l > N(\varepsilon)$ 时, 有

$$d(x_n,\ x_l) < \varepsilon,$$

那么, $\{x_n\}$称为 Cauchy 序列.

定义 6.5 如果距离空间中的每一个 Cauchy 序列都是收敛的, 则它称为完备的距离空间. 如果 Riemann 流形 M 关于从 Riemann 度量诱导的距离是完备的, 则 M 称之为**完备的 Riemann 流形**.

附注 从距离函数的三角不等式立即得到从一点出发的距离函数是 Lipschitz函数, 因而是几乎处处可微的.

从 Cauchy 收敛原理立即知道, 欧氏空间 $\mathbb{R}^n$是完备的 Riemann 流形. 现在我们证明下列重要的结果.

定理 6.6 (Hopf-Rinow, 1931) 在 Riemann 流形 M 中, 下列条件是等价的:

(i) M 是完备的;

(ii) 对任何 $x \in M$, $\exp_x$ 可定义在整个 T_xM 上, 即从点 x 出发的测地线可无限延伸;

(iii) 存在一点 x, 使 $\exp_x$ 可定义在整个 T_xM 上;

(iv) M 的任何有界闭子集是紧致的.

附注 从(i)和(iv)的等价性可以看出, 完备的 Riemann 流形是特殊的完备距离空间. 例如, 可列集

$$\mathcal{S} = \{a_i;\ i = 1,\ 2,\ \cdots\}$$

上定义距离 $d: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to [0,\ \infty)$:

$$d(a_i,\ a_j) = \begin{cases} 0, \text{如果} & i = j; \\ 1, \text{如果} & i \neq j, \end{cases}$$

那么, $\mathcal{S}$是没有 Cauchy 序列的距离空间. $\mathcal{S}$是有界的, 但不是紧致的.

证明 (i)$\Rightarrow$(ii): 设 $\gamma: [0,\ \varepsilon] \to M$ 是以弧长为参数的测地线, $x = \gamma(0)$. 从

测地线微分方程的存在唯一性定理可知,它延拓的最大区间为开区间(a, b). 如果$b<\infty$. 取数列$\{s_n\}\to b$, $s_n<b$, 那么,对任何$\varepsilon>0$, 存在N,当$n, l>N$时,有

$$|s_n-s_l|<\varepsilon.$$

从而

$$d(\gamma(s_n), \gamma(s_l))\leqslant|s_n-s_l|<\varepsilon.$$

这意味着$\{\gamma(s_n)\}$组成M中的 Cauchy 序列. 由假定$\gamma(s_n)\to y\in M$. 根据定理 5.3,我们取y的邻域W,使其中任意两点,可用长度小于ε的唯一测地线相连接. 取$B_\delta(y)\subset W$. 设

$$d(\gamma(s_n), y)<\delta, \ |s_n-b|<\frac{\varepsilon}{2},$$

那么,以$\gamma(s_n)$为始点,沿$\gamma'(s_n)$方向的测地线至少从$\gamma(s_n)$起延长ε长度. 而

$$s_n+\varepsilon>b-\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon=b+\frac{\varepsilon}{2}.$$

这意味着$\gamma(b)$是有意义的,并且$\gamma(b)=y$, 这和测地线γ的最大定义区间(a, b)中$b<\infty$矛盾. 同样可说明$a>-\infty$是不可能的. γ因而可定义在$(-\infty, \infty)$上.

(ii)⇒(iii)是显然的.

(iii)⇒(iv):首先证明条件(iii)使命题 6.7 成立.

命题 6.7 *M 中任何一点 y 可用极小测地线与 x 相连接(见图 6.1).*

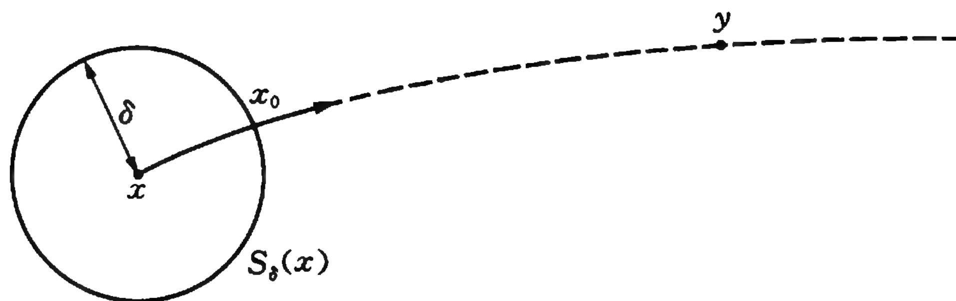


图 6.1

对任意$y\in M$,设$d(x, y)=r$, 存在测地球$B_\delta(x)$,它是T_xM上半径为δ的实心球在指数映照$\exp_x$下的微分同胚像. 从而,测地球面$S_\delta(x)$是紧的,并且$d(z, y)$是$S_\delta(x)$上的连续函数,存在x_0,使

$$d(x_0, y)=\min_{z\in S_\delta(x)} d(z, y),$$

那么,过 x 和 x_0 作以弧长为参数的测地线 $\gamma(s)=\exp_x(sv)$, $|v|=1$. 由条件(iii)知道,它可无限延伸. 为证明 $\gamma(r)=y$, 我们来证明

$$d(\gamma(s),\ y)=r-s. \tag{6.1}$$

定义点集

$$A=\{s\in[\delta,\ r];\ (6.1)\ \text{成立}\}.$$

首先,注意到

$$\begin{aligned} r=d(x,\ y)&=\inf_{x'\in S_\delta(x)}(d(x,\ x')+d(x',\ y))\\ &=\delta+\inf_{x'\in S_\delta(x)}d(x',\ y)\\ &=\delta+d(x_0,\ y)=\delta+d(\gamma(\delta),\ y), \end{aligned}$$

即

$$d(\gamma(\delta),\ y)=r-\delta.$$

这说明 $\delta\in A$, A 非空.

其次,注意到 $\phi=d(\gamma(s),\ y)-r+s$ 是 s 的连续函数,$\phi^{-1}(0)$是闭集,而 $A=\phi^{-1}(0)\cap[\delta,\ r]$ 作为两个闭集的交也是闭集.

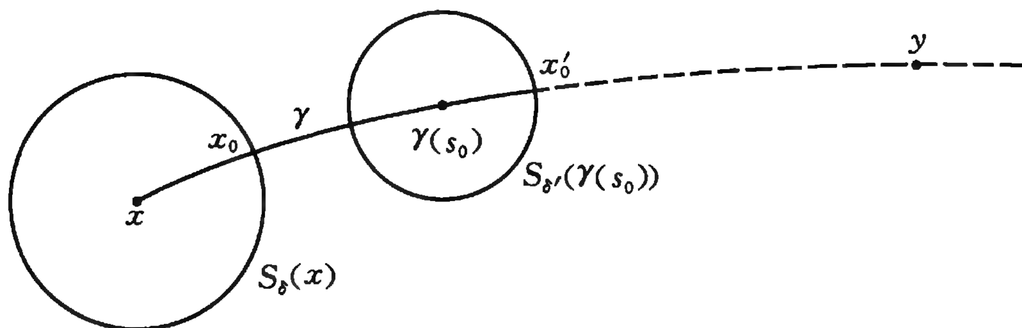


图 6.2

下面来证明,A 也是开集. 如图 6.2 所示,假定 $s_0\in A$. 对 $\gamma(s_0)$,存在 $S_{\delta'}(\gamma(s_0))$以及 x_0',使

$$d(x_0',\ y)=\min_{x'\in S_{\delta'}(\gamma(s_0))}d(x',\ y),$$

那么,和前面讨论一样,我们有

$$d(\gamma(s_0),\ y)=\delta'+d(x_0',\ y). \tag{6.2}$$

由于 $s_0\in A$, 因此

$$d(\gamma(s_0),\ y) = r - s_0. \tag{6.3}$$

从(6.2)式和(6.3)式得

$$d(x_0',\ y) = r - s_0 - \delta'. \tag{6.4}$$

这样,从距离函数的三角不等式和(6.4)式得到

$$d(x,\ x_0') \geqslant d(x,\ y) - d(x_0',\ y) = r - (r - s_0 - \delta') = s_0 + \delta'.$$

另一方面,从 x 沿 γ 到 $\gamma(s_0)$,再从 $\gamma(s_0)$沿径向测地线到 x_0',整条曲线有长度 $s_0 + \delta'$. 从上面不等式知这是长度最短的曲线,一定是光滑测地线,而且和 γ 重合,即

$$x_0' = \gamma(s_0 + \delta').$$

代入(6.4)式得到

$$d(\gamma(s_0 + \delta'),\ y) = r - (s_0 + \delta'),$$

这说明 $s_0 + \delta' \in A$. 进而,如果 $s_1 \in A$, 那么,对任何 $s < s_1$ 必有 $s \in A$. 事实上,

$$d(\gamma(s),\ y) \leqslant d(\gamma(s),\ \gamma(s_1)) + d(\gamma(s_1),\ y) \leqslant s_1 - s + r - s_1 = r - s,$$

$$d(\gamma(s),\ y) \geqslant d(x,\ y) - d(x,\ \gamma(s)) \geqslant r - s.$$

上面两个不等式说明

$$d(\gamma(s),\ y) = r - s.$$

这样,我们证明了 A 是开集,所以, $A = [\delta,\ r]$. 断言(6.1)式成立,特别地, $y = \gamma(r)$.

下面我们利用命题 6.7 来证明(iv). 设 $K \subset M$ 是任一有界闭集. 存在常数 $C > 0$, 使对任何 $k \in K$, $d(x,\ k) \leqslant C$. 因此

$$K \subset \{y \in M;\ d(x,\ y) \leqslant C\} \overset{\text{命题6.7}}{=} \exp_x B_C(0),$$

其中 $B_C(0) \subset T_xM$ 是原点为中心 C 为半径的闭实心球,是紧的. 所以, $\exp_x B_C(0)$作为紧集的连续像是紧的,从而,K 作为紧集的闭子集也是紧的.

(iv)⇒(i):首先,所有 M 中的 Cauchy 序列$\{x_i\}$是有界的. 如果它有极限点 x_0,即存在子列$\{x_{i_k}\} \to x_0$. 那么,对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 N,当 $n,\ l > N$ 时,有

$$|\ d(x_n,\ x_0) - d(x_l,\ x_0)\ | < d(x_n,\ x_l) < \varepsilon,$$

即 $d(x_i,\ x_0)$组成$\mathbb{R}$中的 Cauchy 序列,一定收敛.

$$\lim_{i\to\infty} d(x_i, x_0) = \lim_{k\to\infty} d(x_{i_k}, x_0) = 0,$$

即 $x_i \to x_0$. 另一方面,如果 $\{x_i\}$ 没有极限点,那么 $\{x_i\}$ 组成 M 中的有界闭子集. 从(iv)的假定 $\{x_i\}$ 是紧的. 由于序列 $\{x_i\}$ 中的任何点都不是极限点,因此存在开集 $x_j \in U_j$, 它不包含序列中的其他任何点. $\{U_i\}$ 是 $\{x_i\}$ 的开覆盖. 这样的开覆盖不存在有限子覆盖而与紧性相矛盾..

证迄

推论 6.8 完备 Riemann 流形中任何两点都可用极小测地线相连接.

其逆不然,只要考察欧氏空间中的凸子集即可.

推论 6.9 在完备的 Riemann 空间中,任一点出发的指数映照是满映照.

推论 6.10 紧致 Riemann 流形是完备的.

推论 6.11 欧氏空间中的闭子流形是完备的.

7 Jacobi 场和共轭点

测地线方程是非线性方程,如果将测地线方程沿某测地线线性化就得到联系于该测地线的 Jacobi 方程,从而引入 Jacobi 场的概念. 研究 Jacobi 场是研究测地线的重要手段. 这里,我们先推导 Jacobi 方程,证明它的基本性质. 利用 Jacobi场还可在法坐标中得到度量张量的渐近展开.

Jacobi 场和指数映照都和测地线密切相关. 指数映照的奇异性的研究导致共轭点的概念. 本节阐明了它和 Jacobi 场的关系.

下面,先从几何的角度来推导 Jacobi 方程.

设 Riemann 流形中有双参数的光滑映照 $\Gamma:[a, b]\times[c, d]\to M$, 它沿 Γ 定义了两个向量场 T 和 U 如下:

$$T(\Gamma(t, u)) = \Gamma_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),$$
$$U(\Gamma(t, u)) = \Gamma_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right).$$

每个 $u\in[c, d]$ 定义了 M 上的一条曲线 $\gamma_u:[a, b]\to M$, $\gamma_u(t)\overset{\text{def}}{=}\Gamma(t, u)$. 假定每条曲线 γ_u 都是 M 上的测地线. 我们称 Γ 是**单参数测地线族** $\{\gamma_u\}$. 这样,就有

$$[T, U] = \Gamma_*\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}\right] = 0,$$
$$\nabla_T T = 0.$$

从而我们得到

$$\begin{aligned}\nabla_T\nabla_T U &= \nabla_T\nabla_U T\\ &= -\nabla_U\nabla_T T + \nabla_T\nabla_U T + \nabla_{[U, T]}T\\ &= R(U, T)T = -R(T, U)T\end{aligned}$$

限制于初始曲线 γ_0,并且记 $\dot U = \nabla_{\dot\gamma_0}U$, $\ddot U = \nabla_{\dot\gamma_0}\nabla_{\dot\gamma_0}U$, 我们得到

$$\ddot U + R(\dot\gamma_0, U)\dot\gamma_0 = 0. \tag{7.1}$$

沿着 γ_0 的向量场 U,如果,它满足方程(7.1),则称 U 为沿 γ_0 的 **Jacobi 场**.

方程(7.1)称为 **Jacobi 方程**. 由上面的推导我们可得到下列的引理.

引理 7.1 Riemann 流形中任何单参数测地线族的横截向量场一定是 Jacobi场.

我们再从方程的角度来推导 Jacobi 方程. 测地线方程为

$$T(u) = \frac{\mathrm{d}^2 u^i}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}t} = 0.$$

设 $u^i = u^i_0(t)$ 是它的一个解. 我们计算 T 在 $u = u_0(t)$ 的线性化算子

$$T_1(v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}T(u_0 + sv)\mid_{s=0}.$$

直接计算得到

$$\begin{aligned} T_1(v) &= \frac{\mathrm{d}^2 v^i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial u^l_0}v^l\frac{\mathrm{d}u^j_0}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^k_0}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}v^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^k_0}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}u^j_0}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v^k}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}^2 v^i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\partial\Gamma^i_{lk}}{\partial u^j_0}v_j\frac{\mathrm{d}u^l_0}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^k_0}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}v^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^k_0}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}u^j_0}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v^k}{\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

而

$$\frac{\mathrm{D}v^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}u^k_0}{\mathrm{d}t}v^j,$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}^2 v^i}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}u^k_0}{\mathrm{d}t}v_j\right) + \Gamma^i_{jk}\left(\frac{\mathrm{d}v^j}{\mathrm{d}t} + \Gamma^j_{lm}v^l\frac{\mathrm{d}u^m_0}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}u^k_0}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}^2 v^i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial u^l_0}\frac{\mathrm{d}u^l_0}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^k_0}{\mathrm{d}t}v^j - \Gamma^i_{jk}\Gamma^k_{lm}\frac{\mathrm{d}u^l_0}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^m_0}{\mathrm{d}t}v^j \\ &\quad + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}u^k_0}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v^j}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}v^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^k_0}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{jk}\Gamma^j_{lm}v^l\frac{\mathrm{d}u^m_0}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^k_0}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}^2 v^i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial u^l_0}\frac{\mathrm{d}u^l_0}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^k_0}{\mathrm{d}t}v^j - \Gamma^i_{jm}\Gamma^m_{lk}\frac{\mathrm{d}u^l_0}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^k_0}{\mathrm{d}t}v^j \\ &\quad + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}u^k_0}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v^j}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}v^k}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^j_0}{\mathrm{d}t} + \Gamma^i_{ml}\Gamma^m_{jk}v^j\frac{\mathrm{d}u^k_0}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^l_0}{\mathrm{d}t}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} T_1(v) &= \frac{\mathrm{D}^2 v^i}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\partial\Gamma^i_{lk}}{\partial u^j_0} - \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial u^l_0} + \Gamma^m_{lk}\Gamma^i_{jm} - \Gamma^m_{jk}\Gamma^i_{ml}\right)v^j\frac{\mathrm{d}u^l_0}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^k_0}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{D}^2 v^i}{\mathrm{d}t^2} + R^{\cdot i}_{k\cdot lj}v^j\frac{\mathrm{d}u^l_0}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u^k_0}{\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

注意到 $\dot{\gamma}=\frac{\mathrm{d}u_0^i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial u^i}$ 以及 $R(\dot{\gamma},v)\dot{\gamma}=R_{k\cdot lj}^{\cdot i}v^j\frac{\mathrm{d}u_0^l}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u_0^k}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial u^i}$，$T_1(v)$ 就是Jacobi算子.

我们来进一步研究 Jacobi 场的性质.

设 γ 是 M 中的以弧长为参数的测地线，沿 γ 取平行向量场构成的标架场 $\{e_i(t)\}$ 使 $e_1(t)=\dot{\gamma}(t)$，$U(t)$ 是沿 γ 的 Jacobi 场. $U(t)=f^i(t)e_i(t)$，那么，Jacobi方程(7.1)等价于

$$\ddot{f}^i(t)+R_{1i1j}f^j(t)=0,\ i,\ j=1,\ \cdots,\ n. \tag{7.2}$$

这是二阶线性常微分方程组，因此，我们有下列引理.

引理 7.2 (i) 设 γ 是测地线，$v,\ w\in T_{\gamma(0)}M$ 是两个给定的向量，那么，沿 γ 存在唯一的 Jacobi 场 U，使 $U(0)=v$，$\dot{U}(0)=w$；

(ii) 沿测地线的 Jacobi 场的零点是离散的，除非该 Jacobi 场恒等于零.

证明 (i) 由常微分方程的性质立即得到.

(ii) 如果 Jacobi 场 $U(t)$ 的零点有极限点 $\gamma(t_0)$，那么，$f^i(t)$ 在趋向于 t_0 的一列点上为零，$\dot{f}^i(t_0)=0$，即，$\dot{U}(t_0)=0$. 而从本引理中(i)的结论知 $U(t_0)=0$，$\dot{U}(t_0)=0$ 的 Jacobi 场恒为零.

证迄

命题 7.3 沿测地线 γ 的向量场 U 是 Jacobi 场的充要条件为 U 是单参数测地线的横截向量场.

证明 充分性已证明，即引理 7.1. 我们来证明必要性. 设 $\gamma:[0,\ 1]\to M$，U 是沿 γ 的 Jacobi 场且 $U(0)=v$，$\dot{U}(0)=w$.

如果 $v\neq 0$. 作测地线 $\zeta:[0,\ \varepsilon]\to M$，使 $\zeta(0)=\gamma(0)$，$\zeta'(0)=v$. 沿测地线 ζ 定义平行向量场 $T(u)$，$W(u)$，使 $T(0)=\dot{\gamma}(0)$，$W(0)=w$，那么，对任何 $u\in[0,\ \varepsilon]$，定义单参数测地线族

$$\gamma_u=\exp_{\zeta(u)}t(T(u)+uW(u)).$$

设 U_1 是它的横截向量场，前面已经说明它一定是 Jacobi 场. 为证明 $U=U_1$，只要证明 $U_1(0)=v$，$\dot{U}_1(0)=w$ 就够了. 显然

$$\begin{aligned}U_1(0)&=\frac{\partial}{\partial u}\gamma_u\Big|_{\substack{u=0\\t=0}}\\&=\frac{\partial}{\partial u}\zeta(u)\Big|_{u=0}=v.\end{aligned}$$

设 $T_1=\gamma_{u*}\frac{\partial}{\partial t}$，那么 $[T_1,\ U_1]=0$. 而

$$T_1(\zeta(u)) = \frac{\partial}{\partial t}\exp_{\zeta}t(T(u)+uW(u))\Big|_{t=0}$$
$$= T(u)+uW(u),$$

所以

$$\dot{U}_1(0) = \nabla_{\dot{\gamma}(0)}U_1 = \nabla_{U_1(0)}T_1 = \nabla_v T_1$$
$$= \nabla_{\dot{\zeta}(0)}(T(u)+uW(u)) = W(0) = w.$$

当 $v=0$ 时,单参数测地线族退化为

$$\gamma_u = \exp_{\gamma(0)}t(\dot{\gamma}(0)+uw).$$

那么, $U_1(0)=0$, 并且

$$U_1(t) = t(\mathrm{d}\exp_{\gamma(0)})_{t\dot{\gamma}(0)}w.$$

从而

$$\dot{U}_1(t) = (\mathrm{d}\exp_{\gamma(0)})_{t\dot{\gamma}(0)}w + t\nabla_{\dot{\gamma}(t)}(\mathrm{d}\exp_{\gamma(0)})_{t\dot{\gamma}(0)}w,$$

特别地

$$\dot{U}_1(0) = w.$$

这就证明了命题.

证迄

注意到 $\dot{\gamma}$ 以及 $t\dot{\gamma}$ 都是 Jacobi 方程的解. 事实上,我们有下列结果.

引理 7.4 *设 U 是沿测地线 γ 的 Jacobi 场,那么,存在 $a, b\in\mathbb{R}$,使*

$$U = U^{\perp} + (at+b)\dot{\gamma},$$

其中 $\langle U^{\perp}, \dot{\gamma}\rangle = 0$, $U^{\perp}$ 也是沿 γ 的 Jacobi 场.

证明 首先,由 $\ddot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ 及 Jacobi 方程(7.1),我们立即有

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\langle U, \dot{\gamma}\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \dot{U}, \dot{\gamma}\rangle = \langle \ddot{U}, \dot{\gamma}\rangle = -\langle R(\dot{\gamma}, U)\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle = 0.$$

因此

$$\langle U, \dot{\gamma}\rangle = a't+b',\ a',\ b'\in\mathbb{R}.$$

定义 $U^{\perp} = U-(at+b)\dot{\gamma}$, 其中, $a=a'/|\dot{\gamma}|^2$, $b=b'/|\dot{\gamma}|^2$. 那么,显然有 $\langle U^{\perp}, \dot{\gamma}\rangle = 0$, 而且

$$\ddot{U}^{\perp} = \ddot{U} = -R(\dot{\gamma}, U)\dot{\gamma} = -R(\dot{\gamma}, U^{\perp})\dot{\gamma},$$

即 $U^{\perp}$ 满足 Jacobi 方程.

证迄

这个引理说明非平凡的 Jacobi 场是与测地线正交的. 我们称为正交 Jacobi场.

从引理 7.4 可知 $\langle U(t),\ \dot{\gamma}\rangle$ 是 t 的线性函数,如果它有两个零点必恒等于零. 这样,有以下推论.

推论 7.5 设 U 是沿测地线 γ 的 Jacobi 场,如果,存在 $t_1 \neq t_2$ 使 $\langle U(t_1),\ \dot{\gamma}(t_1)\rangle = \langle U(t_2),\ \dot{\gamma}(t_2)\rangle = 0$, 那么,$U$ 是正交 Jacobi 场.

引理 7.6 对任何 $x \in M$, $v \in T_xM$, $X \in T_v(T_xM)$, $\langle X,\ v\rangle = 0$, 那么,单参数测地线族 $\gamma_u(t) = \exp_x t(v+uX)$ 的横截向量场 U 是 $\gamma(t) = \gamma_0(t)$ 的正交 Jacobi 场.

证明

$$U(0) = \frac{\partial}{\partial u}\exp_x t(v+uX)\Big|_{\substack{t=0\\u=0}} = 0,$$

而

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\langle U,\ T\rangle\Big|_{u=0} &= \langle \nabla_T U,\ T\rangle\,|_{u=0} = \langle \nabla_U T,\ T\rangle\,|_{u=0}\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial u}\langle T,\ T\rangle\,|_{u=0} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial u}\langle v+uX,\ v+uX\rangle\,|_{u=0}\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial u}(|\,v\,|^2 + u^2\,|\,X\,|^2)\Big|_{u=0} = 0.\end{aligned}$$

因此

$$\langle U,\ \dot{\gamma}\rangle = \langle U,\ \dot{\gamma}\rangle\,|_{t=0} = 0.$$

证迄

附注 由于 $U(1) = (\mathrm{d}\exp_x)_v X$, 因此

$$\langle(\mathrm{d}\exp_x)_v X,\ \dot{\gamma}(1)\rangle = 0.$$

这说明 Gauss 引理不限于小范围成立.

我们现在利用 Jacobi 场来考察度量张量在法坐标中的渐近展开. 从中可看出 Riemann 流形中曲率与度量的关系.

对任何 $p \in M$, 设 γ 为从点 p 出发的测地线,且 $\dot{\gamma}(0) = \xi$. 设 U 以及 V 是沿 γ 的 Jacobi 场,满足 $U(0) = V(0) = 0$, $\dot{U}(0) = \eta$, $\dot{V}(0) = \zeta$. 根据 Jacobi 方程(7.1)我们来考察 $\langle U,\ V\rangle$ 沿测地线 γ 的渐近展开. 由于

$$\ddot{U}(0) = 0,\ \dddot{U}(0) = -R(\xi,\ \eta)\xi,$$

$$\ddot{V}(0) = 0,\ \dddot{V}(0) = -R(\xi,\ \zeta)\xi,$$

因此

$$\begin{aligned}
&\langle U,\ V\rangle\,|_0 = 0,\\
&\langle U,\ V\rangle'\,|_0 = 0,\\
&\langle U,\ V\rangle''\,|_0 = 2\langle \eta,\ \zeta\rangle,\\
&\langle U,\ V\rangle'''\,|_0 = 0,\\
&\langle U,\ V\rangle''''\,|_0 = (\langle \ddddot{U},\ V\rangle + 4\langle \dddot{U},\ \dot{V}\rangle + 12\langle \ddot{U},\ \ddot{V}\rangle + 4\langle \dot{U},\ \dddot{V}\rangle + \langle U,\ \ddddot{V}\rangle)\,|_0\\
&\qquad\qquad = -8\langle R(\xi,\ \eta)\xi,\ \zeta\rangle.
\end{aligned}$$

我们得到

$$\langle U,\ V\rangle = \langle \eta,\ \zeta\rangle t^2 - \frac{1}{3}\langle R(\xi,\ \eta)\xi,\ \zeta\rangle t^4 + o(t^5).$$

这个关系式可用来得到度量张量在法坐标中的展开式. 设 $x = (x^1,\ \cdots,\ x^n)$ 是以 $p \in M$ 为中心,关于 T_pM 中正交基的法坐标. 对固定的$(x^1,\ \cdots,\ x^n)$,从点 p 出发的通过该固定点的测地线为 $\gamma = (tx^1,\ \cdots,\ tx^n)$. 考虑单参数测地线族

$$\alpha_i(t,\ s) = (tx^1,\ \cdots,\ t(x^i + s),\ \cdots,\ tx^n).$$

它的横截向量场为

$$U_i = \frac{\partial \alpha_i}{\partial s}\bigg|_{s=0} = (0,\ \cdots,\ t,\ 0,\ \cdots,\ 0) = t\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

这是 Jacobi 场,且满足 $U_i(0) = 0,\ \dot{U}_i(0) = \frac{\partial}{\partial x^i}$. 将它代入上述 Jacobi 场的渐近展开式就得到度量张量的展开式:

$$g_{ij}(tx) = \frac{1}{t^2}\langle U_i,\ U_j\rangle = \delta_{ij} - \frac{1}{3}\left\langle R\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x^i}\right)x,\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle t^2 + o(t^3).$$

指数映照由测地线来定义,而 Jacobi 场和测地线密切相关. Jacobi 场和指数映照的关系如何呢? 下面来研究 Jacobi 场和指数映照的关系. 首先,指数映照的微分 d $\exp_x$ 在径向的映像是测地线的切向而不可能退化. 因此,只要考虑 $(\mathrm{d}\exp_x)_v$在 X 的奇异性,其中 X 满足

$$X \in T_vT_xM,\ \langle X,\ v\rangle = 0.$$

考察引理 7.6 中的单参数测地线族 $\gamma_u(t) = \exp_x t(v + uX)$，它的横截向量场 U 是沿测地线 $\gamma(t) = \exp_x tv$ 的 Jacobi 场. 那么

$$U(1) = \frac{\partial}{\partial u}\exp_x t(v + uX)\Big|_{\substack{u=0\\t=1}} = (\mathrm{d}\exp_x)_v X.$$

所以

$$(\mathrm{d}\exp_x)_v X = 0 \Leftrightarrow U(1) = 0.$$

而 $U(0) = 0$. 这说明 $(\mathrm{d}\exp_x)_v$ 在 $v \in T_xM$ 退化导致沿测地线 $\gamma(t) = \exp_x tv$ 存在正交 Jacobi 场 U，它满足 $U(0) = U(1) = 0$.

反之，如果沿测地线 $\gamma:[0, 1] \to M$ 存在非零 Jacobi 场 U，$U(0) = U(1) = 0$，那么，从 x 出发的指数映照，在 $\dot{\gamma}(0)$ 有奇点. 为此，考察单参数测地线族

$$\exp_x t(\dot{\gamma}(0) + u\dot{U}(0)).$$

它的横截 Jacobi 场 U_1 为

$$U_1(t) = t(\mathrm{d}\exp_x)_{t\dot{\gamma}(0)}\dot{U}(0).$$

我们有 $U_1(0) = 0$，以及

$$\dot{U}_1(0) = \mathrm{d}(\exp_x)_0\dot{U}(0) + t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t((\mathrm{d}\exp_x)_{t\dot{\gamma}(0)}\dot{U}(0))\Big|_{t=0} = \dot{U}(0).$$

所以，$U = U_1$，而

$$0 = U(1) = U_1(1) = (\mathrm{d}\exp_x)_{\dot{\gamma}(0)}\dot{U}(0),$$

但 $\dot{U}(0) \neq 0$. 这就证明了下列结果.

引理 7.7 $\mathrm{d}\exp_x$ 在 $v \in T_xM$ 退化的充要条件是沿测地线 $\gamma(t) = \exp_x tv$，存在非零正交 Jacobi 场 U，使 $U(0) = U(1) = 0$.

定义 7.8 对任何 $x \in M$，如果 $\mathrm{d}\exp_x$ 在 $v \in T_xM$ 退化，那么，$x' = \exp_x v$ 称为点 x 沿测地线 $\gamma(t) = \exp_x tv$ 的**共轭点(conjugate point)**. 它就是指数映照 $\exp_x$ 的临界值.

引理 7.7 告诉我们 $\gamma(1)$ 是 $\gamma(0)$ 的共轭点，反过来，$\gamma(0)$ 也是 $\gamma(1)$ 的共轭点. 共轭点的重数就是临界值的重数，即 $(\mathrm{d}\exp_x)$ 核空间的维数.

引理 7.9 设 $\gamma:[0, 1] \to M$ 是测地线. 如果 $\gamma(1)$ 不是 $\gamma(0)$ 的共轭点，那么对任何 $v_0 \in T_{\gamma(0)}M$ 和 $v_1 \in T_{\gamma(1)}M$，沿 γ 存在唯一的 Jacobi 场 J，使 $J(0) = v_0$，$J(1) = v_1$.

证明 对 m 维 Riemann 流形的沿测地线的 Jacobi 场是二阶线性常微分方程的解，解的全体构成 $2m$ 维的线性空间. 设 $\mathscr{J}'$ 是 $J(0)=v_0$ 的 Jacobi 场全体. 那么，$\dim\mathscr{J}'=m$. 定义线性映照 $A:\mathscr{J}'\to T_{\gamma(1)}M$ 为 $A(J)=J(1)$. 我们断言 A 是单映照. 否则，有 $J_1, J_2\in\mathscr{J}'$ 满足 $J_1(1)=J_2(1)$，那么 J_1-J_2 也是沿 γ 的Jacobi 场，并且满足 $(J_1-J_2)(0)=(J_1-J_2)(1)=0$. 这样，如果 $J_1-J_2\neq 0$ 时和 $\gamma(1)$不是 $\gamma(0)$的共轭点相矛盾. 我们说明了 A 是单映照，同时，注意到它又是同维数线性空间之间的线性映照，一定是同构映照.

证迄

显然，欧氏空间沿任一条直线没有共轭点. 对任何常截面曲率 κ 的流形，曲率张量为

$$R(e_i, e_j)e_k=\kappa(\delta_{ik}e_j-\delta_{jk}e_i),$$

其中，$\{e_i\}$是 M 上的任一点附近的局部幺正标架场. 沿任一弧长为参数的测地线 $\gamma(s)$，取平行标架场$\{e_i(s)\}$，$e_1(s)=\dot{\gamma}(s)$，那么，正交 Jacobi 场 $J=f^\alpha e_\alpha(s)$，$\alpha=2, \cdots, m$，并且，方程(7.2)化为

$$\ddot{f}^\alpha(s)+\kappa f^\alpha(s)=0.$$

$f^\alpha(0)=0$ 的通解为

$$f^\alpha(s)=\begin{cases}\dfrac{c_\alpha}{\sqrt{\kappa}}\sin(\sqrt{\kappa}s), & 当\ \kappa>0;\\ c_\alpha s, & 当\ \kappa=0;\\ \dfrac{c_\alpha}{\sqrt{-\kappa}}\sinh(\sqrt{-\kappa}s), & 当\ \kappa<0,\end{cases}$$

其中 c_α 为由 $J'(0)$所决定的任意常数. 我们得到

$$J(s)=f^\alpha e_\alpha=S_\kappa E(s), \tag{7.3}$$

其中 $E(s)=c_\alpha e_\alpha(s)$ 为沿 γ 的平行向量场. 而

$$S_\kappa(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\kappa}}\sin(\sqrt{\kappa}s), & 当\ \kappa>0;\\ s, & 当\ \kappa=0;\\ \dfrac{1}{\sqrt{-\kappa}}\sinh(\sqrt{-\kappa}s), & 当\ \kappa<0.\end{cases} \tag{7.4}$$

特别地，对单位球面 $\kappa=1$，Jacobi 场为

$$J(s) = \sin sE(s).$$

这样,我们说明了球面中任何一对对径点关于连接它们的任何测地线互为共轭点.

一般地,知道了截面曲率的界就可对 Jacobi 场的大小作出估计. 设

$$C_\kappa(s) = \begin{cases} \cos(\sqrt{\kappa}s), & \text{当 } \kappa > 0; \\ 1, & \text{当 } \kappa = 0; \\ \cosh(\sqrt{-\kappa}s), & \text{当 } \kappa < 0. \end{cases} \tag{7.5}$$

S_κ 和 C_κ 都满足方程

$$f'' + \kappa f = 0,$$

但满足不同的初始条件. $C_\kappa(s)$满足 $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, 而 $S_\kappa(s)$满足初始条件 $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

命题 7.10 设 γ 是以弧长为参数的测地线,J 是沿 γ 的 Jacobi 场. 如果,沿着 γ 流形的截面曲率有上界 $\kappa \leqslant \mu$, $\mu \geqslant 0$. 令

$$f_\mu = |J(0)| C_\mu + |J|'(0) S_\mu.$$

如果,对 $s \in (0, \sigma)$,有 $f_\mu(s) > 0$, 那么,对 $s \in (0, \sigma)$, 有估计

$$|J(0)| C_\mu(s) + |J|'(0) S_\mu(s) \leqslant |J(s)|, \tag{7.6}$$

其中 S_κ 和 C_κ 如(7.4)式、(7.5)式所示.

证明 首先,注意到 f_μ 满足方程 $f''_\mu + \mu f_\mu = 0$ 以及初始条件 $f_\mu(0) = |J(0)|$, $f'_\mu(0) = |J|'(0)$. 从直接计算可得

$$|J|'' = |J|^{-1}\langle J'', J\rangle + |J|^{-3}(|J'|^2 |J|^2 - \langle J, J'\rangle^2).$$

从而,由 Jacobi 方程和曲率条件,得到

$$\begin{aligned} |J|'' + \mu |J| = &\ |J|^{-1}(-\langle R(\gamma', J)\gamma', J\rangle + \mu\langle J, J\rangle) \\ &+ |J|^{-3}(|J'|^2 |J|^2 - \langle J, J'\rangle^2) \geqslant 0. \end{aligned} \tag{7.7}$$

又考虑到 f_μ 满足的方程,得到

$$(|J|' f_\mu - |J| f'_\mu)' = |J|'' f_\mu - |J| f''_\mu \geqslant 0,$$

即

$$|J|' f_\mu - |J| f'_\mu \geqslant (|J|' f_\mu - |J| f'_\mu)|_{s=0} = 0,$$

这里,初始条件 $f_\mu(0) = |J(0)|$, $f'_\mu(0) = |J|'(0)$. 据此可得

$$\left(\frac{|J|}{f_\mu}\right)' = \frac{1}{f_\mu^2}(|J|'f_\mu - |J|f'_\mu) \geqslant 0,$$

从而

$$\frac{|J|}{f_\mu} \geqslant \lim_{s\to 0}\frac{|J|(s)}{f_\mu(s)} = 1.$$

这就证明了命题.

证迄

附注 类似地,知道了截面曲率的下界 $\kappa \geqslant \lambda$, $\lambda \leqslant 0$, 就可以估计 Jacobi 场模长的上界,见[2].

推论 7.11 *M 是完备的 Riemann 流形,它的截面曲率非正,那么,对任何 $x \in M$, $\exp_x: T_xM \to M$ 没有共轭点.*

证明 设 J 是沿测地线 $\gamma:[0, \infty)$ 的 Jacobi 场,满足 $J(0)=0$, $J'(0)\neq 0$. 根据(7.7)式,当 $\mu=0$ 时, $|J|'' \geqslant 0$.

若存在最小的 $t_0 \in (0, \infty)$,使 $|J|(t_0)=0$ (由 Jacobi 场零点的离散性),那么,在$(0, t_0)$中 $|J|>0$, 而与 $|J|''\geqslant 0$ 矛盾.

证迄

8 等距和全测地子流形

Riemann 流形的子流形理论有丰富的内容,这里仅给出一些基本定义,并阐明全测地子流形与等距变换的关系.最后给出焦点的定义,它是共轭点概念的推广.关于子流形理论,特别是极小子流形理论,请参阅作者的另一著作[29].

设 M 和 N 是 Riemann 流形,$\phi: M \to N$ 是浸入.如果,对任何 $X, Y \in T_pM$, $\langle X, Y\rangle_M = \langle \phi_* X, \phi_* Y\rangle_N$, 那么,$\phi$ 称为**等距浸入(isometric immersion)**,M 就称为**Riemann浸入子流形(immersed submanifold)**,简称子流形.如果 ϕ 是嵌入,那么,M 称为 **Riemann 嵌入子流形(imbedded submanifold)**,或正则子流形.

设 N 是 n 维 Riemann 流形,M 是 m 维 Riemann 流形,$M \to N$ 是等距浸入.假定 $n = m + k$,当 $k > 0$, k 称为 M 在 N 中的余维数.如果 $k = 1$, 子流形 M 称为 N 中的超曲面.

在等距浸入时,往往把 M 中的点 $p \in M$ 等同于它在 N 中的像 $\phi(p)$.那么,对任何 $p \in M$, 外围空间 N 在点 p 的切空间 T_pN 可分解成子流形 M 在 p 的切空间 T_pM 和它在 T_pN 中的正交补,**法空间(normal space)** N_pM 的直和.这样的分解是可微的.所以,切丛 TN 沿着 M 有直和分解

$$TN\,|_M = TN \oplus NM.$$

分别用 $(\cdots)^T$ 以及 $(\cdots)^N$ 表示向量在切丛 TM 和法丛 NM 的投影.

设 $\overline{\nabla}$ 为 N 上的 Levi-Civita 联络,而 ∇ 则表示 M 上的 Levi-Civita 联络.对任何 $V, W \in \Gamma(TM)$, 我们有 $\nabla_V W = (\overline{\nabla}_V W)^T$. 容易验证 ∇ 是子流形 M 上的 Levi-Civita联络.定义

$$B_{VW} \overset{\text{def}}{=} (\overline{\nabla}_V W)^N = \overline{\nabla}_V W - \nabla_V W.$$

容易验证 B 是取值于 NM 的 TM 上的对称二次型.B 称为子流形 M 在 N 中的**第二基本型式(second fundamental form)**.

定义 8.1 如果 $B \equiv 0$, 那么,M 称为 N 中的**全测地子流形(totally geodesic submanifold)**.

命题 8.2 设 M 是 N 的子流形.它是全测地子流形的充要条件是对任何 $p \in M$, 过 p 并且和 M 相切的外围空间 N 中的测地线一定是子流形 M 中的测

地线.

证明 对 $p \in M$, $v \in T_pM$, 有外围空间 N 上的测地线 $\gamma(s)$, 使 $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$. 又设 ζ 是子流形 M 上的测地线, 使 $\zeta(0) = p$, $\dot{\zeta}(0) = v$, 那么, 当 M 是全测地子流形时, $B \equiv 0$, 以及

$$\overline{\nabla}_{\dot{\zeta}} \dot{\zeta} = \nabla_{\dot{\zeta}} \dot{\zeta} + B(\dot{\zeta}, \dot{\zeta}) = 0.$$

这说明 ζ 也是 N 上的测地线, 由测地线方程的唯一性可知 $\zeta = \gamma$, 因此, $\gamma \in M$.

反之, 设外围空间 N 中与子流形 M 相切的测地线 $\gamma(s)$, $\gamma(0) \in M$, $\dot{\gamma}(0) \in T_{\gamma(0)}M$, 我们有 $\overline{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$, 根据假设, 同时它又是子流形 M 中的测地线, 即 $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$, 从而

$$B(v, v) = \overline{\nabla}_{\dot{\gamma}(0)} \dot{\gamma} - \nabla_{\dot{\gamma}(0)} \dot{\gamma} = 0,$$

其中, $v = \dot{\gamma}(0)$ 是任意的, 这就得到 $B \equiv 0$.

证讫

这个结果说明全测地子流形是测地线的高维推广. 例如, 平面是 $\mathbb{R}^3$ 中的全测地子流形, 球面就不是. 一般而言, 全测地子流形是很少的. 如果流形有充分多的对称, 就会有全测地子流形.

如果 $\dim M = \dim N$, 那么, 等距浸入就称为**局部等距(local isometry)**, **等距嵌入**称为整体等距, 或简称为**等距(isometry)**.

容易验证 Levi-Civita 联络, 曲率张量都是局部等距不变量.

从命题 8.2 以及截面曲率的几何解释(见本书第 5 部分末), 立即可得下述命题.

命题 8.3 *设 M 是 N 中的全测地子流形, κ 和 $\bar{\kappa}$ 分别是 M 和 N 中的截面曲率, 那么, 对任何 2 维平面 $E \subset T_xM$, $x \in M$, 必有 $\kappa(E) = \bar{\kappa}(E)$.*

我们来证明等距和全测地子流形关系的结果.

定理 8.4 *Riemann 流形 N 到自身的局部等距的不动点的集合是全测地子流形.*

证明 设 $\phi: N \to N$ 是给定的局部等距, $M = \{y \in N, \phi(y) = y\}$ 是不动点的集合.

首先说明 M 具流形结构. 设 $x \in M$, 有

$$B(\delta) = \{v \in T_xN, |v| < \delta\},$$
$$B_\delta = \{y \in N, d(x, y) < \delta\}.$$

我们可以取 δ 充分小, 使 $\exp_x: B(\delta) \to B_\delta$ 是微分同胚.

设 $\mathcal{F} = \{v \in T_xN; \phi_* v = v\}$. 那么, $\mathcal{F}$ 是 T_xN 的线性子空间. 我们只

要证明

$$M \cap B_\delta = \exp_x(\mathcal{F} \cap B(\delta)).$$

如果 $y \in M \cap B_\delta$,取 $v \in B(\delta)$,使 $\exp_x v = y$ 并且 $\gamma:[0, 1] \to N$ 是连接 x 和 y 的唯一极小测地线 $\gamma(t) = \exp_x tv$. 由于 $x, y \in M$,因此 $\phi(x) = x$, $\phi(y) = y$. 注意到 $\phi(\gamma)$ 也是连接 x 和 y 的极小测地线,从而,$\phi(\gamma) = \gamma$. 特别地,$\phi_* \dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(0)$,即 $\phi_* v = v$, $v \in \mathcal{F}$. 这就证明了 $y \in \exp_x(\mathcal{F} \cap B(\delta))$,也就是$M \cap B_\delta \subset \exp_x(\mathcal{F} \cap B(\delta))$.

反之,设 $y = \exp_x v$, $v \in \mathcal{F} \cap B(\delta)$, $\gamma:[0, 1] \to N$ 是测地线 $\gamma(t) = \exp_x tv$,那么,$\phi(\gamma(t))$ 也是测地线,并且还有 $\phi(\gamma(0)) = \phi(x) = x$ 以及 $(\phi(\gamma))'(0) = \phi_* \gamma'(0) = \phi_* v = v = \gamma'(0)$. 由唯一性得,$\phi(\gamma) = \gamma$. 特别地,$\phi(y) = \phi(\gamma(1)) = \gamma(1) = y$,即 $y \in M \cap B_\delta$. 我们证明了

$$M \cap B_\delta = \exp_x(\mathcal{F} \cap B(\delta)),$$

M 因而具有流形结构.

上述关系也说明:过 M 上的点并且与 M 相切的 N 中的测地线 γ,经 ϕ 作用以后 $\phi(\gamma)$ 也是具有相同初始条件的测地线,所以,测地线在等距 ϕ 作用下不动 $\phi(\gamma) = \gamma$,而落在 M 中,根据命题 8.2,M 是全测地子流形.

证迄

作为共轭点的推广,还可引进**焦点(focal point)**的概念. 设 M 是 N 的子流形,记 NM 是 M 在 N 中的法丛,那么,$\exp|_{NM}$ 的临界值,就称为子流形 M 的焦点. 显然,当 M 退化成一点时,焦点就成为共轭点.

我们不讨论一般子流形的焦点,而考虑 N 上一类特殊超曲面的焦点. 设 $\gamma:[0, b] \to N$ 是弧长为参数的测地线. 记在点 $x = \gamma(0)$ 所有与 γ 正交的测地线全体构成的超曲面为 M,它称为点 x 的测地超曲面. 考虑从 x 出发的与 γ 正交的某一测地线 $\zeta(u) \subset M$. 将 $\dot{\gamma}(0)$沿 $\zeta(u)$平行移动得到向量场 $T(u)$,考虑单参数测地线族 $\gamma_u = \exp_{\zeta(u)} tT(u)$. 从命题 7.3 的证明可见,它的横截向量场 $J(t)$满足 $J(0) = \zeta'(0)$, $J'(0) = 0$. 因此,J 是 $J'(0) = 0$ 的沿着 γ 的 Jacobi 场. 如果,存在一点 c, $0 < c < b$,使 $\left.\frac{\partial \gamma_u}{\partial u}\right|_{\substack{u=0 \\ t=c}} = J(c) = 0$,那么,$\gamma(c)$是 $\exp|_{NM}$ 的一个临界值,即 $\gamma(c)$是 M 的一个焦点,也称 $\gamma(c)$是 $x = \gamma(0)$ 沿 γ 的焦点. 上面的分析说明 $\gamma(c)$是 $\gamma(0)$焦点的条件就是沿 γ 存在非零 Jacobi 场 J,使 $J'(0) = 0$, $J(c) = 0$. 不难说明,这样的 Jacobi 场是正交 Jacobi 场.

9 Cartan-Hadamard 定理

J. Hadamard 在 1898 年证明了在非正 Gauss 曲率的完备的单连通曲面 M 上,对任何一点 $x \in M$, 从点 x 出发的指数映照 $\exp_x: T_xM \to M$ 是微分同胚. E. Cartan在 1928 年将它推广到高维. 这个定理不仅指出了流形和欧氏空间微分同胚,而且指出了指数映照这个特殊的映照是微分同胚映照. 我们这里证明的 **Cartan-Hadamard 定理**稍微再一般一点(定理 9.1).

定理 9.1 设 M 是单连通并且完备的 Riemann 流形. 如果,对任何 $x \in M$, $\exp_x: T_xM \to M$ 没有共轭点,那么,$\exp_x$ 是微分同胚. 特别地,在具非正截面曲率的单连通完备流形中,从任一点出发的指数映照是微分同胚.

定理 9.1 是下列一系列引理的推论.

引理 9.2 设$\widetilde{M}$是完备的 Riemann 流形,$\phi: \widetilde{M} \to M$ 是局部等距,那么,ϕ 是覆盖映照,且 M 是完备的.

证明 ϕ 作为局部微分同胚是开映照,$\phi(\widetilde{M})$是 M 中的开集. 如果 ϕ 不是满映照,则 $\phi(\widetilde{M})$是 M 中的真子集. 存在 $p \in Bd(\phi(\widetilde{M}))$, $p \notin \phi(\widetilde{M})$. 存在 p 在M 中的邻域 $B_\varepsilon(p)$,使 $B_\varepsilon(p)$中任一点都可与 p 用极小测地线相连接.

取 $x \in B_\varepsilon(p) \cap \phi(\widetilde{M})$,即存在 $\tilde{x} \in \widetilde{M}$,使$\phi(\tilde{x}) = x$. 设连接 p 和x 的测地线 $\gamma: [0, 1] \to M$,使 $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = p$. 利用局部等距又考虑到$\widetilde{M}$完备,得到$\widetilde{M}$中的测地线 $\tilde{\gamma}: [0, 1] \to \widetilde{M}$,使 $\phi(\tilde{\gamma}) = \gamma$. 特别地,$p = \gamma(1) = \phi(\tilde{\gamma}(1)) \in \phi(\widetilde{M})$, 而与 p 的选取相矛盾. 因此,$\phi: \widetilde{M} \to M$ 是满映照.

同样的道理,过 $x = \phi(\tilde{x}) \in M$ 的任何一条测地线必是$\widetilde{M}$中过 $\tilde{x}$ 某一测地线$\tilde{\gamma}$的像 $\phi(\tilde{\gamma})$,因$\tilde{\gamma}$可无限延伸,$\phi(\tilde{\gamma})$也可无限延伸,所以,M 是完备的.

对任何 $x \in M$, 取 δ 充分小,使

$$\exp_x: B(\delta) = \{v \in T_xM, \mid v \mid < \delta\} \to B_\delta = \{y \in M, d(x, y) < \delta\}$$

是微分同胚. 由于 ϕ 是局部等距,因此 $\phi^{-1}(x)$是离散的. 设 $\phi^{-1}(x) = \tilde{x}_i \in \widetilde{M}$, 令

$$\widetilde{B}^i_\delta = \{\tilde{y} \in \widetilde{M}, d(\tilde{x}_i, \tilde{y}) < \delta\},$$

我们来验证 B_δ 是 x 的特征邻域,即

(i) $\phi^{-1}(B_\delta)=\bigcup_i \widetilde{B}^i_\delta$;

(ii) $\phi:\widetilde{B}^i_\delta\to B_\delta$ 是同胚;

(iii) $\widetilde{B}^i_\delta\cap\widetilde{B}^j_\delta=\varnothing,\ i\neq j$.

(i) 对任何 $\tilde{z}\in\phi^{-1}(B_\delta)$,即 $\tilde{z}\in\widetilde{M},\ \phi(\tilde{z})\in B_\delta$,用唯一的极小测地线 $\zeta(t)$ 连接 $\phi(\tilde{z})$ 和 x,使 $\zeta(0)=\phi(\tilde{z}),\ \zeta(1)=x$. 由于 ϕ 是局部等距并且 $\widetilde{M}$ 完备,因此存在测地线 $\tilde{\zeta}(t)\in\widetilde{M}$,使 $\tilde{\zeta}(0)=\tilde{z},\ \phi(\tilde{\zeta}(t))=\zeta(t)$. 特别地,$\phi(\tilde{\zeta}(1))=\zeta(1)=x$. 所以,存在 i,使 $\tilde{\zeta}(1)=\tilde{x}^i$. 由于 ζ 的长度 $L(\zeta)<\delta$,从而,$L(\tilde{\zeta})=L(\zeta)<\delta$. 这意味着 $\tilde{z}=\tilde{\zeta}(0)\in\widetilde{B}^i_\delta$, 即

$$\phi^{-1}(B_\delta)\subset\bigcup_i\widetilde{B}^i_\delta.$$

反过来,对任何 $\tilde{z}\in\widetilde{B}^i_\delta$,有极小测地线 $\tilde{\zeta}$ 连接 $\tilde{x}_i$ 和 $\tilde{z}$,那么,$\phi(\tilde{\zeta})$ 是从 x 出发的测地线,并且它的长度 $L(\phi(\tilde{\zeta}))=L(\tilde{\zeta})<\delta,\ d(x,\phi(\tilde{z}))<\delta$,从而,$\tilde{z}\in\phi^{-1}(B_\delta)$. 这就证明了

$$\phi^{-1}(B_\delta)=\bigcup_i\widetilde{B}^i_\delta.$$

(ii) 局部等距将测地线变成测地线,而测地线又由初始条件唯一确定,所以 $\exp_{\phi(\tilde{x}_i)}\phi_*\tilde{v}=\phi\exp_{\tilde{x}_i}\tilde{v}$, 即有图 9.1 所示的交换图.

$$\begin{array}{ccc} T_{\tilde{x}_i}\widetilde{M} & \xrightarrow{\phi_*} & T_xM \\ \downarrow{\scriptstyle \exp_{\tilde{x}_i}} & & \downarrow{\scriptstyle \exp_x} \\ \widetilde{M} & \xrightarrow[\phi]{} & M \end{array}$$

图 9.1

特别地,有图 9.2 所示的交换图.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{B}_i(\delta) & \xrightarrow{\phi_*} & B(\delta) \\ \downarrow{\scriptstyle \exp_{\tilde{x}_i}} & & \downarrow{\scriptstyle \exp_x} \\ \widetilde{B}^i_\delta & \xrightarrow[\phi]{} & B_\delta \end{array}$$

图 9.2

因为 ϕ_* 和 $\exp_x$ 都是微分同胚,所以它们的复合

$$\phi(\exp_{\tilde{x}_i}) = \exp_x \phi_*$$

也是微分同胚,因而 $\exp_{\tilde{x}_i}$ 是单映照. 又由$\widetilde{M}$的完备性,它又是满的,所以,$\exp_{\tilde{x}_i}$ 是同胚. 再从上式我们得到 ϕ 是$\widetilde{B}^i_\delta$ 和 B_δ 的同胚.

(iii) 如果 $i \neq j$, $\widetilde{B}^i_\delta \cap \widetilde{B}^j_\delta \neq \varnothing$,那么,存在 $\tilde{z} \in \widetilde{B}^i_\delta \cap \widetilde{B}^j_\delta$. 设 $\tilde{\zeta}_i$ 和 $\tilde{\zeta}_j$ 分别是连接 $\tilde{z}$ 和 $\tilde{x}_i$ 以及 $\tilde{z}$ 和 $\tilde{x}_j$ 的唯一测地线. 同时,ζ 是 B_δ 中连接 $\phi(\tilde{z})$ 和 x 的唯一测地线,因此有 $\phi(\tilde{\zeta}_i) = \phi(\tilde{\zeta}_j)$. 这说明 $\tilde{\zeta}_i$ 和 $\tilde{\zeta}_j$ 都是 ζ 过 $\tilde{z}$ 的提升. 由唯一性得 $\tilde{\zeta}_i = \tilde{\zeta}_j$,导致 $\tilde{x}_i = \tilde{x}_j$, 得到矛盾.

证迄

引理 9.3 设 M 是完备的 Riemann 流形,对 $x \in M$, $\exp_x: T_xM \to M$ 无共轭点,那么,$\exp_x$ 是覆盖映照.

证明 设 g 是 M 上的完备度量. 利用指数映照在切空间 T_xM 上定义拉回度量 $g' = \exp_x^* g$. 我们来证明 g' 一定是完备度量. 事实上,在 T_xM 上,从点 0 出发的射线 $\tilde{\gamma}: [0, \infty) \to T_xM$, $\tilde{\gamma}(t) = tv$, 在指数映照下是 M 上从点 x 出发的测地线 $\gamma(t) = \exp_x \tilde{\gamma}$. 从定义立即知道 $\exp_x: (T_xM, g') \to (M, g)$ 是局部等距. 所以

$$(\mathrm{d}\exp_x) \nabla'_{\dot{\tilde{\gamma}}} \dot{\tilde{\gamma}} = \nabla_{(\mathrm{d}\exp_x)\dot{\tilde{\gamma}}} (\mathrm{d}\exp_x) \dot{\tilde{\gamma}} = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0.$$

根据无共轭点假设,$\nabla'_{\dot{\tilde{\gamma}}} \dot{\tilde{\gamma}} = 0$. 所以,$T_xM$ 中从点 0 出发的射线在度量 g' 下是测地线,它们都是可以无限延长的,因此,g' 是 T_xM 上的完备度量. 根据引理 9.2 立即得到 $\exp_x$ 是覆盖映照. 这就完成了引理的证明.

证迄

定理 9.1 的证明 当 M 是单连通时,我们只要证明 $\exp_x$ 是单映照. 否则,存在 v_1, v_2 使 $y = \exp_x v_1 = \exp_x v_2$. 用曲线$\tilde{\gamma}$连接 v_1, v_2,那么, $\exp_x \tilde{\gamma} = \gamma$ 是过 y 的闭曲线. 从 M 的单连通性,这条闭曲线同伦于 y. 覆盖映照具有性质:它可将底流形上曲线的同伦形变提升上去. 因此,覆盖映照 $\exp_x$ 可将曲线 γ 收缩到一点 y 的同伦提升到 T_xM 上收缩到一点的同伦. 所以, $v_1 = v_2$, $\exp_x$ 是同胚. 又由于 $\exp_x$ 无共轭点,因而是微分同胚.

特别地,当 M 具有非正截面曲率时,从推论 7.10 知 M 没有共轭点. 因此,从任何点出发的指数映照是微分同胚.

我们也可直接证明具非正截曲率的流形一定没有共轭点. 设 U 是沿测地线的正交 Jacobi 场,且 $U(0) = 0$. 令 $f = \langle U, U \rangle$. 那么

$$
\begin{aligned}
f' &= 2\langle \dot{U}, U\rangle, \\
f'' &= 2\langle \ddot{U}, U\rangle + 2\,|\,\dot{U}\,|^2 - 2\langle R(\dot{\gamma}, U)\,\dot{\gamma}, U\rangle \\
&= 2\,|\,\dot{U}\,|^2 \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

上述最后不等式由于截面曲率处处非正的假定. 由于 Jacobi 场 U 的零点是离散的,如果 U 存在另外的零点,设最近的零点在 t_0,那么, $f \geqslant 0$, $f(0) = f(t_0) = 0$, 这和 $f'' \geqslant 0$ 相矛盾,因此,M 没有共轭点.

证迄

10 空间形式

此处研究最简单的 Riemann 流形:常截面曲率的完备 Riemann 流形,即所谓**空间形式(space form)**. 在 Riemann 流形 M 上,如果关于度量 g 的截面曲率是 κ,那么,关于度量 λg, $\lambda > 0$ 的截曲率是 $\frac{1}{\lambda}\kappa$. 因此我们只要讨论截曲率为 0, 1, −1 的情形.

我们先用例子说明三类空间形式的存在性,即欧氏空间、单位球面和**双曲空间**. 对双曲空间我们介绍了常用的三种几何模型以及它们间的相互关系. 进而,我们运用 Cartan-Hadamard 定理证明单连通空间形式的唯一性. 最后,我们还介绍了空间形式中的"平面公理"和三角公式.

具平坦度量的欧氏空间是完备的、截面曲率为零的 Riemann 流形.

命题 10.1 单位球面 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} (n \geq 2)$ 有常截面曲率 $+1$.

证明 $n = 2$ 时,容易从直接计算得到. 在第 4 部分中已作为例子计算过. 当 $n \geq 3$ 时,定义 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的等距 $\tilde{\phi}: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ 如下:

$$\tilde{\phi}(x^1, x^2, x^3, x^4, \cdots, x^{n+1}) = (x^1, x^2, x^3, -x^4, \cdots, -x^{n+1}).$$

它诱导了球面上的等距 $\phi: S^n \to S^n$. 并且,ϕ 的不动点恰好是 $S^2 (\subset \mathbb{R}^{n+1}) = (x^1, x^2, x^3, 0, \cdots, 0)$. 根据定理 8.4,$S^2$ 是 S^n 的全测地子流形. S^2 的截面曲率为 1,根据命题 8.3,我们得到 S^n 的某一截面 $E \subset T_pS^n$ 的截面曲率 $\kappa(E) = 1$.

设 $E' \subset T_qS^n$ 是另一个二维平面. 设 $\{e_1, e_2\}$ 张成 E,点 p 的位置向量是 e_{n+1}, e_1', e_2' 张成 E',点 q 的位置向量是 e_{n+1}'.

首先,在 e_{n+1} 和 e_{n+1}' 的平面中作一旋转 ϕ 将 e_{n+1} 变到 e_{n+1}',同时,ϕ 将 $E \subset T_pM$ 变到 $\overline{E} \subset T_qM$. 进而,我们又有使 q 不动的旋转 ϕ',将 $\overline{E}$ 变到 E',所以,等距 $\phi' \circ \phi$ 将 p 变到 q,同时将 $E \subset T_pS^n$ 变到 $E' \subset T_qS^n$. 这就证明了 $k(E') = 1$.

证讫

命题 10.2 在单位开实心球 $B^n \subset \mathbb{R}^n$ 上赋予双曲度量

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - \sum_i (x^i)^2)^2} \sum_i (dx^i)^2 \tag{10.1}$$

组成常截面曲率为 −1 的完备的 Riemann 流形 $\mathbb{H}^n$.

证明 首先证明完备性. 考察曲线 $\zeta:[0, \infty) \to B^n$,它定义为

$$\zeta(s) = \left(\frac{e^s - 1}{e^s + 1}, 0, \cdots, 0\right).$$

直接计算不难验证其中 s 为弧长参数,并且,$\zeta([0, \infty))$是 B^n 中等距 ϕ:

$$\phi(x^1, \cdots, x^n) \to (x^1, -x^2, \cdots, -x^n)$$

的不动点集. 因此,$\zeta(s)$是 $\mathbb{H}^n$ 中的测地线. 注意到,$\mathbb{R}^n$中的任何正交线性变换 A 限制于 B^n 时变成 B^n 关于双曲度量(10.1)的等距. 因此,$A(\zeta)$是从原点出发的测地线的全体. 它们是可以无限延伸的. 根据 Hopf-Rinow 定理,$\mathbb{H}^n$ 是完备的.

下面,我们进一步说明 $\mathbb{H}^n$ 具有常截面曲率-1.

设过点 p 的截面 $\pi \in T_p\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^n$. 设 E 是由 π 和 p 点组成的$\mathbb{R}^n$的 3 维子空间(如果 π 已包含 p 或 $p = 0$, E 不是唯一确定的). 记$\mathbb{R}^n = E \oplus E^{\perp}$. 注意到映照 $(e, e^{\perp}) \to (e, -e^{\perp})$, $e \in E$, $e^{\perp} \in E^{\perp}$ 限制于 B^n 时是等距的且以 $E \cap B^n$ 为不动点集. 因此,$E' = E \cap B^n$ 是 $\mathbb{H}^n$ 的全测地子流形. 根据命题 8.3,只要计算 π 在 E' 中的截面曲率就得到 π 在 $\mathbb{H}^n$ 中的截面曲率. 由于可通过适当的正交线性变换使 $E' = (x^1, x^2, x^3, 0, \cdots, 0)$,我们不妨假设 $E' = B^3 = B^n \cap \mathbb{R}^3$.

取 B^3 中的球坐标,使(10.1)式化为

$$ds^2 = \frac{4}{(1-\rho^2)^2}(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \cos^2\theta d\phi^2).$$

定义

$$X_1 = \frac{1-\rho^2}{2}\frac{\partial}{\partial \rho},\ X_2 = \frac{1-\rho^2}{2\rho}\frac{\partial}{\partial \theta},\ X_3 = \frac{1-\rho^2}{2\rho\cos\theta}\frac{\partial}{\partial \phi},$$

那么

$$\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij},$$

$$[X_1, X_2] = -\frac{1+\rho^2}{2\rho}X_2,\ [X_2, X_3] = -\frac{1-\rho^2}{2\rho}\tan\theta X_3,\ [X_1, X_3] = -\frac{1+\rho^2}{2\rho}X_3.$$

利用前述公式(3.2),可以算出所有$\nabla_{X_i}X_j$,然后得到曲率张量表达式为

$$\langle R(X_i, X_j)X_k, X_l \rangle = -(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}).$$

这就说明了,B^3 在双曲度量下的截面曲率是-1.

证迄

附注 在单位圆盘 $B^2 = \{x^2 + y^2 < 1\}$ 上的双曲度量

$$ds^2 = \frac{4}{(1-(x^2+y^2))^2}(dx^2+dy^2)$$

就是古典的 **Poincaré 度量**,它在数学史上有重大的意义. 双曲平面上的几何实现了 Lobachevsky 的非欧几何的模型. 由于 $\mathbb{H}^2$ 不能等距浸入到 $\mathbb{R}^3$ 导致非欧几何长期未被人们所接受.

习题 证明将 B^2 变到 B^2 的分式线性变换是 Poincaré 度量的等距变换.

上面介绍了双曲空间的 Poincaré 单位球模型. 它还有另外两种常用的模型:Minkowski 模型和上半空间模型.

Minkowski 模型 在向量空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中定义非退化并且非正定的内积:对 x, $y \in \mathbb{R}^{n+1}$, 定义

$$\langle x, y\rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

那么,我们得到 Minkowski 空间 $\mathbb{R}_1^{n+1}$.

考虑 $\mathbb{R}_1^{n+1}$ 中的二次超曲面

$$\{x \in \mathbb{R}_1^{n+1};\ \langle x, x\rangle = -1\}.$$

它有两个连通分支. 定义

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1};\ \langle x, x\rangle = -1,\ x_0 > 0\}.$$

对 $\mathbb{H}^n$ 中的任何一点 p,考察它的切空间 $T_p\mathbb{H}^n$. 对过点 p 的 $\mathbb{H}^n$ 中的任一曲线 $C(t)$, $0 \leqslant t < \varepsilon$, $C(0) = p$. 从条件 $\langle C(t), C(t)\rangle = -1$ 得到

$$\langle C'(t), C(t)\rangle = 0.$$

这说明 $T_p\mathbb{H}^n$ 只包含满足 $\langle v, p\rangle = 0$ 的向量 v. 它恰为线性映照 $v \to \langle v, p\rangle$ 的核,其维数正好是 n,因此

$$T_p\mathbb{H}^n = \{v \in \mathbb{R}_1^{n+1};\ \langle v, p\rangle = 0,\ \langle p, p\rangle = -1\}.$$

$\mathbb{H}^n$ 中的度量由外围的 Minkowski 的度量所诱导. 考虑到 Minkowski 内积的指标数是 1(使内积为负定的最大子空间的维数). 对任何 $v \in T_p\mathbb{H}^n$, 由于 $\langle v, p\rangle = 0$, $\langle p, p\rangle = -1$, 因此 v 和 p 线性独立. 如果 $\langle v, v\rangle < 0$, 这就和 Minkowski 内积指标数为 1 相矛盾. 又如果 $\langle v, v\rangle = 0$, 那么,由 p 和 v 张成的二维平面上内积也为负定,也得到矛盾. 因此,对任何 $v \in T_p\mathbb{H}^n$, 我们总有

$$\langle v, v\rangle > 0.$$

这说明 $\mathbb{H}^n$ 从 $\mathbb{R}_1^{n+1}$ 诱导得到度量是正定的,是 Riemann 度量. 这就得到了双曲空间的 Minkowski 模型.

双曲空间的单位球模型和 Minkowski 模型的关系可由关于 $-e_0$ 的球极投影得到. 对 $(0, x_1, \cdots, x_n) \in B^n$, 它和 $-e_0$ 的连线为

$$l:(-1, 0, \cdots, 0)+t(1, x_1, \cdots, x_n)=(-1+t, tx_1, \cdots, tx_n).$$

当它和 $\mathbb{H}^n$ 相交时,有

$$-(-1+t)^2+t^2x_1^2+\cdots+t^2x_n^2=-1,$$

我们有

$$t=\frac{2}{1-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}.$$

直线 l 和 $\mathbb{H}^n$ 交于

$$\begin{cases}\underline{x_0}=t-1=\dfrac{1+|x|^2}{1-|x|^2},\\[2mm] \underline{x_i}=tx_i=\dfrac{2x_i}{1-|x|^2},\end{cases}$$

其中 $|x|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2$.

上半空间模型 令

$$\mathbb{R}_+^n=\{x\in\mathbb{R}^n, x_n>0\},$$

其中定义 Riemann 度量 $ds^2=g_{ij}dx_idx_j$, 以及

$$g_{ij}=\frac{\delta_{ij}}{x_n^2}.$$

从上半空间 $\mathbb{R}_+^n$ 到单位球的微分同胚是关于以 $-e_n$ 为中心、以$\sqrt{2}$为半径的球面的反演变换. 对任何 $x\in\mathbb{R}_+^n$, 设它的像为 $\tilde{x}$,那么

$$\tilde{x}=-e_n+t(x+e_n),$$
$$|x+e_n||\tilde{x}+e_n|=2.$$

据此可得

$$t=\frac{2}{|x+e_n|^2}.$$

再代入前式,得到

$$\tilde{x}=\frac{2(x+e_n)}{|x+e_n|^2}-e_n.$$

将它写成分量形式,即

$$\begin{cases} \widetilde{x}_n = \dfrac{2(x_n+1)}{|x+e_n|^2} - 1 = \dfrac{1-|x|^2}{|x+e_n|^2}, \\ \widetilde{x}_i = \dfrac{2x_i}{|x+e_n|^2}. \end{cases}$$

注意到上面第一式的对偶式是

$$x_n = \frac{1-|\widetilde{x}|^2}{|\widetilde{x}+e_n|^2} = \frac{|x+e_n|^2(1-|\widetilde{x}|^2)}{4},$$

即

$$1-|\widetilde{x}|^2 = \frac{4x_n}{|x+e_n|^2}.$$

由此可见

$$|\widetilde{x}|<1 \Leftrightarrow x_n > 0.$$

习题 在双曲空间的上半空间模型下,计算它的截面曲率,并确定它的测地线.

下面利用 Cartan-Hadamard 定理来证明空间形式的唯一性.

定理 10.3 设 M 和 M' 是两个 n 维的单连通的具有相同常曲率 κ 的空间形式. 设 $x \in M$, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 T_xM 的幺正基, $x' \in M'$, $\{e_1', \cdots, e_n'\}$ 是 $T_{x'}M'$ 的幺正基,那么,存在唯一的等距 $\phi: M \to M'$,使 $\phi(x) = x'$, $\phi_* e_i = e_i'$.

证明 事实上,我们只要考虑 $\kappa = 0, -1$,以及 $\kappa = 1$ 的情形,而 M 分别为 $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{H}^n$ 以及 S^n.

首先,假定 $\kappa = 0$ 及 -1. 根据 Cartan-Hadamard 定理, $\exp_x: T_xM \to M$ 以及 $\exp: T_{x'}M' \to M'$ 都是微分同胚. 定义 $\Phi: T_xM \to T_{x'}M'$,它是使 $\Phi(e_i) = e_i'$ 的内积空间的同构. 我们设

$$\phi = \exp_{x'} \circ \Phi \circ \exp_x^{-1}.$$

它当然是微分同胚. 下面来证明它也是等距.

设 $y \in M$, $y' = \phi(y)$, y' 可表示如下:

存在唯一测地线 $\gamma(t) = \exp_x t\dot{\gamma}(0): [0, 1] \to M$,使 $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ 以及 $\gamma'(t) = \exp_{x'} t\Phi(\dot{\gamma}(0)): [0, 1] \to M'$,使 $\gamma'(0) = x'$, $\dot{\gamma}'(0) = \Phi(\dot{\gamma}(0))$,那么, $y' = \gamma'(1)$,我们要证明 $\phi_*: T_yM \to T_{y'}M'$ 是等距.

从

$$
\begin{aligned}
\phi_*(\dot\gamma(1)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(\gamma(t))\Big|_{t=1} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp_{x'}\circ\Phi(t\,\dot\gamma(0))\Big|_{t=1} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp_{x'}t\,\dot\gamma'(0)\Big|_{t=1} = \dot\gamma'(1),
\end{aligned}
$$

我们有

$$
|\dot\gamma(1)| = |\dot\gamma(0)| = |\dot\gamma'(0)| = |\dot\gamma'(1)|.
$$

这说明 ϕ_* 保持径向等距. 又根据 Gauss 引理, ϕ_* 将 $\dot\gamma(1)$ 的正交补映照到 $\dot\gamma'(1)$ 的正交补. 这样,为证明 ϕ 是等距,只要证明对任何 $X\in T_yM,\ X\perp\dot\gamma(1)$, 成立 $|X| = |\phi_* X|$.

设 $\widetilde{X}$ 是在切空间 T_xM 中在 $\dot\gamma(0)$ 的切向量,使 $(\mathrm{d}\exp_x)_{\dot\gamma(0)}\widetilde{X} = X$. 根据 Gauss 引理, $\widetilde{X}$ 必与径向射线 $t\,\dot\gamma(0)$ 正交. 记 $\widetilde{X}' = \Phi(\widetilde{X})$, $\widetilde{X}'$ 看成 $T_{x'}M'$ 在 $\dot\gamma'(0)$ 的向量,它也正交与径向射线 $t\,\dot\gamma'(0)$, 那么, $X' = \mathrm{d}\exp_{x'}(\widetilde{X}') = \phi_* X$.

在 M 上考虑单参数测地线族

$$
\Gamma(t,u) = \exp_x t(\dot\gamma(0) + u\,\widetilde{X}).
$$

它的横截向量场 U 是沿着测地线 γ 的 Jacobi 场,即满足 Jacobi 方程:

$$
\ddot U + R(\dot\gamma, U)\,\dot\gamma = 0,
$$

并且

$$
U(0) = 0,\ \dot U(0) = \widetilde{X},
$$

$$
U(1) = (\mathrm{d}\exp_x)_{t\dot\gamma(0)}t\,\widetilde{X}\Big|_{t=1} = (\mathrm{d}\exp_x)_{\dot\gamma(0)}\widetilde{X} = X.
$$

它是正交 Jacobi 场.

在流形 M 将点 x 的幺正基 $\{e_i\}$ 沿测地线 γ 平行移动,得到正交标架场 $\{e_i(t)\}$. 设上述 Jacobi 场 $U(t)$ 关于正交标架场 $\{e_i(t)\}$ 分解得到 $U(t) = U^i(t)e_i(t)$, 并且 $\widetilde{X} = \widetilde{X}^i e_i$.

从前面命题 4.4 知道常截面曲率 κ 的流形 M 的曲率张量可表示为

$$
R(X,Y)Z = \kappa(\langle X, Z\rangle Y - \langle Y, Z\rangle X),
$$

其中 $X, Y, Z\in\Gamma(TM)$. 这样,上面的 Jacobi 方程的向量形式化为分量形式:

$$
\begin{cases}
\ddot U^i + \kappa\,|\dot\gamma|^2 U^i = 0,\\
U^i(0) = 0,\ \dot U^i(0) = \widetilde{X}^i.
\end{cases}
$$

在 M' 上考虑对应的单参数测地线族

$$\Gamma'(t,u)=\exp_{x'}t(\dot{\gamma}'(0)+u\widetilde{X}').$$

同样得到沿 M' 上测地线 γ' 的 Jacobi 场 U',满足

$$\ddot{U}'+R'(\dot{\gamma}',U')\dot{\gamma}'=0,$$

并且

$$U'(0)=0,\ \dot{U}'(0)=\widetilde{X}',\ U'(1)=X'.$$

它也是正交 Jacobi 场.

将 $\{e_i'\}=\{\Phi(e_i)\}$ 沿测地线 γ' 平行移动得到 $\{e_i'(t)\}$,注意到 $\widetilde{X}'=\Phi(\widetilde{X})=\widetilde{X}^i e'_i$,从而有 M' 上分量形式的 Jacobi 方程

$$\begin{cases}\ddot{U}'^i+c\,|\,\dot{\gamma}'\,|^2U'^i=0,\\ U'^i(0)=0,\ \dot{U}'^i(0)=\widetilde{X}^i.\end{cases}$$

注意到 $|\dot{\gamma}|=|\dot{\gamma}(0)|=|\dot{\gamma}'(0)|=|\dot{\gamma}'|$,因此,在 M 沿测地线 γ 的 Jacobi 场 U 和在 M' 上沿 γ' 的 Jacobi 场满足相同的常微分方程组和相同的初始条件,它们有相同的解 $U'^i(t)=U^i(t)$. 从而

$$|X'|=|U'^i(1)e_i'(1)|=\sqrt{\sum(U'^i(1))^2}=\sqrt{\sum(U^i(1))^2}=|X|.$$

进而

$$\phi_*e_i=(\mathrm{d}\exp_{x'})_0\circ\Phi_*(\mathrm{d}\exp_x^{-1})_0e_i=e_i'.$$

我们完成了 $\kappa=0,-1$ 情形的证明.

我们再考虑 $\kappa=1$ 的情形,即 $M=S^n$. 球面上的测地线是大圆. 从 $x\in S^n$ 出发的两条测地线,如果它们相交,必交于 x 的对径点 $\tilde{x}=-x$. 这个事实说明过 S^n 上非对径的两点之间有唯一的不过对径点的测地线. 所以

$$\exp_x^{-1}:S^n\backslash\{\tilde{x}\}\to T_nS^n$$

是有意义的光滑映照. 定义 $\phi:S^n\backslash\{\tilde{x}\}\to M'$ 为

$$\phi=\exp_{x'}\circ\Phi\circ\exp_x^{-1},$$

其中 $\Phi:T_xS^n\to T_{x'}M'$ 是由 $\Phi(e_i)=e_i'$ 决定的线性同构. 和前面一样,ϕ 是局部等距.

我们来延拓 ϕ,使它定义在整个 S^n 上. 任取 $z\in S^n\backslash\{\tilde{x}\}$,$\bar{z}$ 是它的对径点. 设 $z'=\phi(z)$ 且它在 z 切空间的诱导映照 $\phi_*:T_zS^n\to T_{z'}M'$,记为 Ψ,那么,我们

也可定义 $\psi:S^n\setminus\{\bar{z}\}\to M$, 为

$$\psi=\exp_{z'}\circ\Psi\circ\exp_z^{-1}.$$

同理,Ψ 也是局部等距.

设 $W=S^n\setminus\{\bar{x},\bar{z}\}$, 它当然是连通的.现在,有两个映照 ϕ, $\psi:W\to M'$, 它们都是局部等距.从构造知 $\phi(z)=\psi(z)$, $\mathrm{d}\phi(z)=\mathrm{d}\psi(z)$. 从后面将要证明的引理 10.4 得到 ϕ 和 ψ 在 W 上都相等.所以,我们可以定义映照 $\theta:S^n\to M'$ 为

$$\theta(y)=\begin{cases}\phi(y), & \text{当 } y\in S^n\setminus\{\bar{x}\},\\ \psi(y), & \text{当 } y\in S^n\setminus\{\bar{z}\}.\end{cases}$$

这是定义在 S^n 上的光滑映照.它也是从紧流形 S^n 到 M' 的局部等距.根据命题 8.2,θ 是覆盖映照,又由于 M' 是单连通的,因此 θ 是微分同胚而为整体等距,并且,$\theta_*e_i=e_i'$.

证迄

定理 10.3 的唯一性部分由下述引理 10.4 所证明.

引理 10.4 设 M 是连通的流形,ϕ_1, $\phi_2:M\to N$ 是两个局部等距,使对某 $x\in M$, $\phi_1(x)=\phi_2(x)=x'\in N$,并且,$\mathrm{d}\phi_1(x)=\mathrm{d}\phi_2(x):T_xM\to T_{x'}N$,那么,$\phi_1=\phi_2$.

证明 设 $A\subset M$ 定义为

$$A=\{z\in M,\ \phi_1(z)=\phi_2(z),\ \mathrm{d}\phi_1(z)=\mathrm{d}\phi_2(z)\}.$$

由假定 $x\in A$, A 非空.显然,A 是闭集.

我们来证明它也是开集.设 $z\in A$,那么,$z'=\phi_1(z)=\varphi_2(z)\in N$.取 $\delta>0$ 充分小,使 $\exp_z:B(\delta)\to B_\delta(z)$ 是微分同胚,其中 $B(\delta)=\{v\in T_zM,\ |v|<\delta\}$, 而 $B_\delta(z)$ 是 M 中以 z 为中心、以 δ 为半径的距离球.

根据局部等距将测地线变成测地线,而测地线由初始条件所唯一确定,因此 $\phi_i\circ\exp_z=\exp_{z'}\circ\mathrm{d}\phi_i$, $i=1,2$. 而在 $B(\delta)$ 中 $\exp_z$ 可逆,在 $B_\delta(z)$ 中,有

$$\phi_i=\exp_{z'}\circ\mathrm{d}\phi_i\circ\exp_z^{-1},\ i=1,2,$$

即对任何 $y'\in B_\delta(z)$, 并注意到 $\mathrm{d}\phi_1(z)=\mathrm{d}\phi_2(z)$, 我们有

$$\varphi_1(y')=\exp_{z'}\circ\mathrm{d}\phi_1\circ\exp_z^{-1}(y')=\exp_{z'}\circ\mathrm{d}\phi_2\circ\exp_z^{-1}(y')=\phi_2(y'),$$

而 $\mathrm{d}\phi_1(y')=\mathrm{d}\phi_2(y')$ 也立即可得,这说明 $B_\delta(z)\subset A$. 由于 M 是连通的,因此 $A=M$.

证迄

定理 10.3 有一个很有趣的推论(推论 10.5).

推论 10.5 设 M 是完备的单连通 Riemann 流形，那么，M 是空间形式的充要条件是对任何 $x, x' \in M$，总存在一个等距 $\phi: M \to M$，使 $\phi(x) = x'$，$\mathrm{d}\phi(e_i) = e'_i$.

对 Riemann 流形 M，对任何 $x, x' \in M$，如果总存在等距 $\phi: M \to M$，使 $\phi(x) = x'$，那么，M 称为**齐性 Riemann 流形**. 上述推论说明单连通空间形式一定是齐性 Riemann 流形. 特别地，双曲空间 $\mathbb{H}^n$ 一定是齐性 Riemann 流形.

我们还有下列性质，称为“平面公理”(命题 10.6).

命题 10.6 设 M_κ 是常截面曲率 κ 的空间形式，$W \subset T_pM_\kappa^n$，$p \in M_\kappa$ 是 $k \geqslant 2$ 维子空间，那么 $N := \exp_p(W \cap B(\varepsilon))$ 是 M_κ^n 的全测地子流形，其中 $B(\varepsilon)$ 是点 p 的切空间中以原点为中心、以 ε 为半径的开球且指数映照在其上微分同胚.

证明 设单位向量 $v \in W$，以及 W 中另一向量 $w \in W$. 过 p 沿 v 方向作测地线 γ_v 以及它的全落在 N 上单参数测地线族 $\alpha(t, u) = \exp_p t(v + uw)$. 它的变分向量场是满足初始条件 $J(0) = 0$，$J(0) = w$ 的 Jacobi 场 $J(t)$. 那么，它和 N 相切. 将 w 沿 γ_v 平行移动得到的沿 γ_v 的向量场和 J 相差一个函数，仍然和 N 相切. 我们得到 $T_{\gamma_v}N = \mathcal{P}(\gamma_v)_0^t W$. 对 N 在 p 的法向量 ξ 沿 γ_v 平行移动得到的向量场 $\xi(t)$ 仍然和 N 在 $\gamma_v(t)$ 处正交. 我们来证明 N 沿测地线 γ_u 是全测地的. 对 $\xi \in W^\perp$，将它沿 α_t 平行移动，得到 $\xi(t, u)$. 注意到它沿 α 和 N 正交. 只要证明 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\xi(t, 0) = 0$. 显然，$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\xi(0, 0) = 0$，而$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}}\xi = R\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial u}\right)\xi$. 根据常截面曲率空间的曲率张量表达式，它等于零.

证迄

对常截面曲率流形还有下列三角公式.

设 p_1, p_2, p_3 是 M_κ^2 中的 3 个点，不在同一条测地线上. 设 γ_{i+2} 是连接 p_i 到 p_{i+1} 的极小测地线，这里 $i \equiv 0 (\mathrm{mod.}\ 3)$. 设 $l_{i+2} = d(p_i, p_{i+1})$ 表示边 γ_{i+2} 的长度，而 $\alpha_i = \angle(p_{i-1}p_ip_{i+1})$ 表示$\dot{\gamma}_{i-1}(0)$ 和 $-\dot{\gamma}_{i+1}(l_{i+1})$ 的夹角，称为 $\Delta(p_1p_2p_3)$ 在顶点 p_i 的(内)角. 我们有三角公式.

余弦定理 对 $\kappa = 0$，有

$$l_i^2 = l_{i+1}^2 + l_{i+2}^2 - 2l_{i+1}l_{i+2}\cos\alpha_i.$$

对 $\kappa > 0$，有

$$\cos(\sqrt{\kappa}l_i) = \cos(\sqrt{\kappa}l_{i+1})\cos(\sqrt{\kappa}l_{i+2}) + \sin(\sqrt{\kappa}l_{i+1})\sin(\sqrt{\kappa}l_{i+2})\cos\alpha_i.$$

对 $\kappa < 0$，有

$$\cosh(\sqrt{-\kappa}l_i) = \cosh(\sqrt{-\kappa}l_{i+1})\cosh(\sqrt{-\kappa}l_{i+2}) \\ - \sinh(\sqrt{-\kappa}l_{i+1})\sinh(\sqrt{-\kappa}l_{i+2})\cos\alpha_i.$$

正弦定理 对 $\kappa = 0$，有

$$\frac{l_1}{\sin\alpha_1} = \frac{l_2}{\sin\alpha_2} = \frac{l_3}{\sin\alpha_3}.$$

对 $\kappa > 0$，有

$$\frac{\sin(\sqrt{\kappa}l_1)}{\sin\alpha_1} = \frac{\sin(\sqrt{\kappa}l_2)}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin(\sqrt{\kappa}l_3)}{\sin\alpha_3}.$$

对 $\kappa < 0$，有

$$\frac{\sinh(\sqrt{-\kappa}l_1)}{\sin\alpha_1} = \frac{\sinh(\sqrt{-\kappa}l_2)}{\sin\alpha_2} = \frac{\sinh(\sqrt{-\kappa}l_3)}{\sin\alpha_3}.$$

对 $\kappa > 0$ 的三角公式的证明见[12]，而对 $\kappa < 0$ 的三角公式的证明见[14].

11 测地线的第二变分公式及其应用

在第 5 部分中,我们推导了弧长泛函的第一变分公式,说明了测地线是弧长泛函的临界点,是几何变分问题的解,测地线方程是弧长泛函的 Euler-Lagrange 方程. 现在来推导重要的**第二变分公式**,并利用它来证明一些重要的定理. 我们将利用第二变分公式证明 Cardan-Hadamard 流形中从一点出发的距离函数的凸性、**Bonnet-Myers 定理**以及 **Weinstein 定理**,而将 **Synge 定理**作为 **Weinstein 定理**的推论.

在这一部分中还给出了 Riemann 流形上 Hessian 算子、Laplace 算子以及梯度向量的定义.

考虑给定曲线 $\gamma_0=\gamma$ 的单参数族 $(t,\ u)\to\gamma_u,\ a\leqslant t\leqslant b,\ 0\leqslant u\leqslant\varepsilon$. 设 $U=\gamma_{u*}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)$是横截向量场,$T$ 是 γ_u 的切向量场. 假设 $|\dot{\gamma}_u|=C_u$ 是常数,并且 $\gamma=\gamma_0$ 上取弧长参数,即 $C_0=|\dot{\gamma}(0)|=1$. 曲线 γ_u 的长度为

$$L(u)=\int_a^b|\dot{\gamma}_u(t)|\,\mathrm{d}t,$$

从(5.3)式得到

$$L'(u)=\int_a^b\frac{1}{|T|}\langle T,\ \nabla_T U\rangle\mathrm{d}t,$$

并且

$$L''(u)=\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{1}{|T|}\langle T,\ \nabla_T U\rangle\right)\mathrm{d}t. \tag{11.1}$$

而

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{1}{|T|}\langle T,\ \nabla_T U\rangle\right)=U\left(\frac{1}{|T|}\langle T,\ \nabla_T U\rangle\right)&\\ =-\frac{1}{|T|^3}\langle T,\ \nabla_T U\rangle^2+\frac{1}{|T|}\langle\nabla_T U,\ \nabla_T U\rangle&\\ +\frac{1}{|T|}\langle T,\ \nabla_U\nabla_T U\rangle&\end{aligned}$$

$$=-\frac{1}{|T|^3}[T\langle T, U\rangle-\langle\nabla_T T, U\rangle]^2$$
$$+\frac{1}{|T|}\langle\nabla_T U, \nabla_T U\rangle+\frac{1}{|T|}[-\langle R(U, T)U, T\rangle$$
$$+T\langle\nabla_U U, T\rangle-\langle\nabla_U U, \nabla_T T\rangle].$$

将它代入(11.1)式,并假定γ是测地线,得到

$$L''(0)=\langle\nabla_U U, \dot{\gamma}\rangle\Big|_a^b+\int_a^b\left[|\dot{U}|^2-\langle R(\dot{\gamma}, U)\dot{\gamma}, U\rangle-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\dot{\gamma}, U\rangle\right)^2\right]\mathrm{d}t. \tag{11.2}$$

这就是弧长泛函在测地线近旁的第二变分公式. 还可将它写成更好的形式. 令$U(t)=U^{\perp}(t)+f(t)\dot{\gamma}(t)$,其中$\langle U^{\perp}(t), \dot{\gamma}\rangle=0$, f是$[a, b]$上的光滑函数,那么

$$|\dot{U}|^2-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\dot{\gamma}, U\rangle\right)^2=|\dot{U}^{\perp}|^2+\dot{f}^2-\dot{f}^2=|\dot{U}^{\perp}|^2.$$

再考虑到曲率张量的性质,我们得到

$$L''(0)=\langle\nabla_U U, \dot{\gamma}\rangle\Big|_a^b+\int_a^b[|\dot{U}^{\perp}|^2-\langle R(\dot{\gamma}, U^{\perp})\dot{\gamma}, U^{\perp}\rangle]\mathrm{d}t, \tag{11.3}$$

其中$\langle\nabla_U U, \dot{\gamma}\rangle\Big|_a^b$与变分的边界条件有关. 对固定端点的变分,它为零.

我们现在来定义一些重要的微分算子. 设$f:M\to\mathbb{R}$是光滑函数. $\mathrm{Hess}(f)=\nabla^2 f$可看成$T^*M\odot T^*M$上的一个截面. 对任意$X, Y\in TM$,定义

$$\nabla^2 f(X, Y)\overset{\mathrm{def}}{=}XY(f)-(\nabla_X Y)f.$$

不难验证,它关于X, Y是对称的,并且关于任一变量是函数线性的. 这就是**Hessian 算子**的定义.

它的迹

$$\Delta f=\mathrm{trace}(\nabla^2 f)$$

定义为f的 Laplace,即

$$\Delta f=\sum_{i=1}^n\nabla^2 f(e_i, e_i),$$

其中$\{e_i\}$是M上的局部幺正标架场. 不难说明,它和$\{e_i\}$的选取无关. 事实上,令$\tilde{e}_i=\sum_j a_{ij}e_j$,其中$(a_{ij})$是正交阵. 那么

$$\sum_i \nabla^2 f(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i) = \sum_{i,j} \nabla^2 f(a_{ik}e_k, a_{ij}e_j)$$
$$= \sum_{i,j} a_{ik}a_{ij} \nabla^2 f(e_k, e_j)$$
$$= \sum_j \nabla^2 f(e_j, e_j).$$

因此,**Laplace 算子** Δ 是 M 上整体定义的算子.

我们还可从另一角度来说明 Laplace 算子. 如所知,对任何 $X \in TM$, 由

$$X(f) = \langle \mathrm{grad}\, f, X \rangle \quad 或 \quad \mathrm{grad}\, f = e_i(f)e_i$$

定义函数的**梯度向量 grad *f***. 另一方面,对 M 上的任何向量场 X,它的散度为

$$\mathrm{div}\, X = \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle,$$

其中 e_i 为局部幺正标架场. 那么

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f = \mathrm{div}(e_i(f)e_i) = \langle \nabla_{e_j}(e_i(f)e_i), e_j \rangle$$
$$= e_j e_i(f)\langle e_i, e_j \rangle + e_i(f)\langle \nabla_{e_j} e_i, e_j \rangle$$
$$= e_i e_i(f) - e_i(f)\langle e_i, \nabla_{e_j} e_j \rangle$$
$$= e_i e_i(f) - \langle \mathrm{grad}\, f, \nabla_{e_j} e_j \rangle$$
$$= e_i e_i(f) - (\nabla_{e_i} e_i) f = \Delta f.$$

习题 试给出 Laplace 算子的局部表达式.

下面来讨论第二变分公式的应用.

定义 11.1 设 $f: M \to \mathbb{R}$是 Riemann 流形 M 上的函数. 如果,对任意测地线 $\gamma \subset M$, 当 f 限制在测地线 γ 上时是凸函数(弱凸函数),即 $(f \circ \gamma)'' > 0 (\geqslant 0)$, 那么,称 f 为 M 上的凸函数(弱凸函数).

对于任何 $v \in T_x M$, 作测地线 $\gamma(t)$,使 $\gamma(0) = x$, $\dot{\gamma}(0) = v$. 那么

$$\nabla^2 f(v, v) = \dot{\gamma}\,\dot{\gamma} f - (\nabla_{\dot{\gamma}}\,\dot{\gamma}) f = \dot{\gamma}(f \circ \gamma)' = (f \circ \gamma)''.$$

所以,f 是 M 上凸函数(弱凸函数)的充要条件是 $\nabla^2 f > 0 (\geqslant 0)$.

我们来研究 M 上从固定点出发的距离函数.

引理 11.2 设 M 是任意 Riemann 流形,$\rho: M \to \mathbb{R}$是从点 o 出发的距离函数,那么,ρ^2 在点 o 的某一邻域$\mathcal{U}_o$ 中是光滑的凸函数.

证明 设在点 o 的邻域$\mathcal{U}$有法坐标$\{x^1, \cdots, x^n\}$,它使 $x^i(o) = 0$. 那么,ρ^2 在$\mathcal{U}$中恰为 $\sum (x^i)^2$. 对 $v \in T_o M$, 过点 o 沿 v 的测地线γ 在法坐标下为

$$x^i = v^i t, \ \rho^2 \circ \gamma = \sum t^2 (v^i)^2,$$

$$\nabla^2\rho^2(v, v) = (\rho^2 \circ \gamma)'' = 2\sum(v^i)^2 > 0,$$

所以，存在点 o 的邻域 $\mathcal{U}_o \subset \mathcal{U}$，使 $\nabla^2\rho^2$ 在 $\mathcal{U}_o$ 上大于零.

证迄

这个引理说明，在 Riemann 流形中，从任何一点出发的距离函数的平方在充分小的范围内是凸函数. 而对于它在大范围的情形，就需要对流形有一定的限制. 我们有下述定理.

定理 11.3　设 M 是完备单连通的 Riemann 流形，它的截面曲率非正 (**Cartan-Hadamard 流形**). 设 $o \in M$，那么，距离函数 $\rho(x) = d(x, o): M \to [0, \infty)$ 的平方 ρ^2 是 M 上的光滑的凸函数.

证明　从指数映照的定义及 Cartan-Hadamard 定理立即知道，$\rho^2(x) = |\exp_o^{-1}(x)|^2$，它是 M 上的光滑函数. 设 $x \neq o$，$v \in T_xM$. 如果 $v \neq 0$，要证明 $\nabla^2\rho^2(v, v) > 0$.

令 $\zeta: [0, \varepsilon] \to M$ 为过 x 的测地线 $\zeta(0) = x$，$\dot\zeta(0) = v$. 再用测地线 $\gamma_u: [0, r] \to M$ 将 o 与 $\zeta(u)$ 相连接，其中，$r = \rho(x)$，$\gamma = \gamma_0$. 因 M 中任何两点只有一条测地线，所以，γ_u 构成单参数测地线族. 它的横截向量场 U 满足

$$U(0) = \frac{\partial}{\partial u}\gamma_u\Big|_{\substack{t=0\\u=0}} = 0,$$

$$U(r) = \frac{\partial}{\partial u}\gamma_u\Big|_{\substack{t=r\\u=0}} = \frac{\partial}{\partial u}\zeta(u)\,|_{u=0} = \dot\zeta(0) = v.$$

而从第一变分公式(5.4)，得

$$L'(0) = \langle\dot\gamma, U\rangle\Big|_0^r - \int_0^r \langle\nabla_{\dot\gamma}\,\dot\gamma, U\rangle\mathrm{d}t = \langle\dot\gamma(r), v\rangle,$$

再代入第二变分公式(11.3)，边界项消失，得到

$$L''(0) = \int_0^r [\,|\dot U^\perp|^2 - \langle R(\dot\gamma, U^\perp)\,\dot\gamma, U^\perp\rangle]\mathrm{d}t \geqslant \int_0^r |\dot U^\perp(t)|^2\mathrm{d}t.$$

那么

$$\begin{aligned}
\nabla^2\rho^2(v, v) &= \dot\zeta\,\dot\zeta\rho^2\,|_{u=0} - (\nabla_{\dot\zeta(0)}\dot\zeta)\rho^2 \\
&= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\rho^2(\zeta(u))\Big|_{u=0} \\
&= 2r\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\rho(\zeta(u))\Big|_{u=0} + 2\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\rho(\zeta(u))\Big)^2\Big|_{u=0} \\
&= 2rL''(0) + 2(L'(0))^2
\end{aligned}$$

$$\geqslant 2r\int_0^r |\dot{U}^{\perp}(t)|^2 \mathrm{d}t + 2\langle \dot{\gamma}(r),\ v\rangle^2.$$

(i) 如果 $\langle \dot{\gamma}(r),\ v\rangle \neq 0$,立即得到$\nabla^2\rho^2(v,\ v) > 0$;

(ii) 如果 $\langle \dot{\gamma}(r),\ v\rangle = \langle \dot{\gamma}(r),\ U(r)\rangle = 0$,那么,$U$ 是正交 Jacobi 场,因此,$\dot{U}^{\perp} = \dot{U} \not\equiv 0$,否则,$\dot{U}(0) = \nabla_{\dot{\gamma}} U(0) = 0$,考虑到$U(0) = 0$,而导致$U \equiv 0$,这与 $U(r) = v \neq 0$ 相矛盾.这就证明了$\nabla^2\rho^2(v,\ v) > 0$.

综上所说,$\nabla^2\rho^2$ 在 $M\setminus\{o\}$ 上是正定的,其中,ρ 是从点 $o \in M$ 出发的距离函数.再考虑到引理 11.2,就给出了整个定理的证明.

证迄

附注 事实上,我们可以证明如果沿测地线 $\gamma:[0,\ b] \to M$ 无焦点,那么对它的任何分段光滑的变分 γ_u,对应的横截向量场 U 满足 $\langle U,\ \dot{\gamma}\rangle = 0$,$U(b) = 0$,必有 $L''(0) > 0$.在下面(第 12 部分中)将证明:如果测地线上有共轭点,就有 $L''(0) < 0$. 因此,无焦点流形是介于非正曲率流形与无共轭点流形之间的一类流形.而我们可以将定理 11.3 推广到无焦点流形的情形.它的证明请见作者的另一著作[29].

定义 11.4 设 $\Delta \subset M$ 是任一集合.对任何 $x,\ y \in \Delta$,如果连接 x 和 y 的极小测地线 γ 全部落在 Δ 中,那么 Δ 称**凸集**;如果连接 x 和 y 的任何测地线 γ 全部落在 Δ 中,那么 Δ 称为**全凸集**.

考察单位球面 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 中半径小于等于$\dfrac{\pi}{2}$的开测地球,它是凸集,但不是全凸集;而半径大于$\dfrac{\pi}{2}$并且小于 π 的开测地球甚至不是凸集.

凸集和凸函数的关系由下列命题所描述.

命题 11.5 设 $\tau: M \to \mathbb{R}$ 是完备 Riemann 流形 M 上的凸函数,那么,**下水平集(sub-level set)**

$$M_c \overset{\text{def}}{=} \{x \in M;\ \tau(x) < c\}$$

是全凸集.

证明 对任何 $x,\ y \in M_c$,用测地线 γ 连接 x 和 y,那么,$(\tau \circ \gamma)'' > 0$. 因此,$\tau \circ \gamma$ 在端点 x 或 y 达到极大值,即 $\tau \circ \gamma < \max(\tau(x),\ \tau(y)) < c$,这说明 $\gamma \in M_c$.

证迄

这样,定理 11.3 告诉我们,完备单连通非正截面曲率的 Riemann 流形中的测地球是全凸集.用引理 11.2 和命题 11.5 取代定理 5.8,给出了测地凸邻域存

在性的另一证明.

O. Bonnet 在 1850 年利用第二变分公式证明了 2 维时的下列定理(定理 11.6),后来在 1941 年由 S. Myers 得到它的高维推广.

定理 11.6　设 M 是 n 维完备 Riemann 流形,它的 Ricci 曲率以 $(n-1)\kappa$ 为下界,其中 κ 为正常数,那么,M 是紧致的,并且,它的直径 $d(M)=\sup_{x,\,y\in M}d(x,\,y)\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$.

证明　设 $x,\,y\in M$ 是任意两点. $\gamma:[0,\,b]\to M$ 是连接它们的以弧长为参数的极小测地线. 我们只要证明

$$b\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

否则,在 M 上存在两点 $x,\,y$,使它们的距离 $b>\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. 沿测地线 γ 取平行幺正标架场 $\{\dot{\gamma},\,e_i(t)\}$, $i=2,\,\cdots,\,n$. 定义沿 γ 的向量场 $X_i=f(t)e_i(t)$, 其中,$f(t)$ 为 $[0,\,b]$ 上的分段光滑的待定函数,并且 $f(0)=f(b)=0$. 以每个 X_i 为横截向量场作测地线 γ 的单参数曲线族,并代入第二变分公式(11.3). 由于是固定端点的变分,因此边界项消失,从而有

$$L_i''(0)=\int_0^b(f'^2-f^2\langle R(\dot{\gamma},\,e_i)\,\dot{\gamma},\,e_i\rangle)\mathrm{d}t,$$

并且

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^n L_i''(0)&=\int_0^b((n-1)f'^2-f^2\langle\mathrm{Ric}\,\dot{\gamma},\,\dot{\gamma}\rangle)\mathrm{d}t\\&\leqslant(n-1)\int_0^b(f'^2-\kappa f^2)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

这里我们用到了定理中 Ricci 曲率下界的条件. 我们取 $f(t)=\sin\frac{\pi}{b}t$, 那么,根据反证法假设 $b>\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, 有

$$f'^2-\kappa f^2=\frac{\pi^2}{b^2}\cos^2\frac{\pi}{b}t-\kappa\sin^2\frac{\pi}{b}t<\kappa\cos\frac{2\pi}{b}t,$$

代入上式得到

$$\sum_{i=2}^n L_i''(0)<(n-1)\kappa\int_0^b\cos\frac{2\pi}{b}t\,\mathrm{d}t=0.$$

故存在某个 j_0, $0 \leqslant j_0 \leqslant n$,使 $L''_{j_0}(0) < 0$, 这和 γ 是极小测地线的事实是矛盾的.

我们从而证明了 $d(M) \leqslant b \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, 这说明流形 M 为 T_xM 中半径为$\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$的闭球在指数映照下的像,一定是紧的.

证迄

附注 1 对半径为$\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$的球 $S^n\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)$,它的截面曲率为 κ,因此,Ricci 曲率为 $(n-1)\kappa$. 它的直径为$\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. 这个例子说明定理中直径的估计是最佳的. 在定理的曲率条件下,如果直径达到最大值$\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$时,流形是否一定为球面呢? 后面,我们将用体积比较定理证明所谓最大直径定理,来回答这一自然的问题.

附注 2 从证明可见定理的条件可以减弱为在 M 中存在一点 x_0,使在从 x_0 出发的以弧长为参数的测地线 γ 上有 $\langle \mathrm{Ricci}\,\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\rangle \geqslant (n-1)C$, $C > 0$. 这个条件还可再减弱. 见[3].

推论 11.7 设 M 是 n 维完备 Riemann 流形,它的 Ricci 曲率以正数为下界,那么,M 的基本群有限.

证明 取 $\pi: \widetilde{M} \to M$ 为通用覆盖. 在$\widetilde{M}$中定义拉回度量 $\pi^* g$,其中,g 是 M 上的 Riemann 度量,那么,$\widetilde{M}$为完备流形并且和 M 局部等距,$\widetilde{M}$的 Ricci 曲率以正数为下界. 因此,$\widetilde{M}$是紧的. 这样, $\pi: \widetilde{M} \to M$ 只能是有限覆盖,基本群因而有限.

证迄

设 $f: M_1 \to M_2$ 是可定向流形 M_1 和 M_2 之间的光滑映照. 设 ω_1 和 ω_2 分别是它们上面确定的定向处处非零的 n-形式. 如果,对任何 $p \in M_1$ 以及任何点 p 的幺正基$\{e_i\}$, $\omega_1(e_1, \cdots, e_n) > 0$,那么,$\omega_2(f_* e_1, \cdots, f_* e_n) > 0$,称 f 是**定向保持的映照**.

定理 11.8(A. Weinstein, 1968) 设 M 是具有正截面曲率的偶数维紧致可定向 Riemann 流形. 证明:任何定向保持的等距 $f: M \to M$ 必有不动点.

证明 如果 f 没有不动点,那么,紧集 M 上的连续函数 $d(x, f(x))$(这里 $d(\cdot, \cdot)$是距离函数)必在某点 $p \in M$ 取到正的极小值 l(点 p 可能不唯一,我们不妨取定其中一点).

设 $\gamma: [0, l] \to M$ 是连接 p 和 $f(p)$的以弧长为参数的极小测地线,那么,$f \circ \gamma$是连接 $f(p)$和 $f^2(p)$的测地线. 任取 $p' \in \gamma$, 有

$$d(p', f(p')) \leqslant d(p', f(p)) + d(f(p), f(p'))$$

$$= d(p', f(p)) + d(p, p')$$
$$= d(p, f(p)) = \min_{x \in M} d(x, f(x)).$$

这意味着上面不等式只能为等式,即

$$d(p', f(p')) = d(p', f(p)) + d(f(p), f(p')).$$

因而,γ 和 $f \circ \gamma$ 在同一测地线上,也就得到

$$f_* \dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(l). \tag{11.4}$$

设 ω 是 M 上确定定向的处处非零的 n-形式. 在点 p 取 ω 的顺向幺正基 $e_1 = \dot{\gamma}(0), e_2, \cdots, e_n$,使 $\omega(e_1, e_2, \cdots, e_n) > 0$, f 是等距,那么,$f_* e_1 = f_* \dot{\gamma}(0), \cdots, f_* e_n$ 组成点 $f(p)$ 的幺正基. 由假设 $\omega(f_* e_1, \cdots, f_* e_n) > 0$.

设$\mathbb{P}^\gamma$ 是沿测地线的平行移动,将 $f_* e_1, \cdots, f_* e_n$ 从 $f(p)$平移到 p 得到 $e_1', \cdots, e_n'$,它们组成点 p 的幺正基,所以,$\omega(e_1', \cdots, e_n')>0$,即$\mathbb{P}^\gamma \circ f_*$ 是正交变换并且 $\det(\mathbb{P}^\gamma \circ f_*) = 1$. 由于

$$e_1' = \mathbb{P}^\gamma f_* e_1 = \mathbb{P}^\gamma f_* \dot{\gamma}(0) \overset{(11.4)}{=} \mathbb{P}^\gamma \dot{\gamma}(l) = \dot{\gamma}(0) = e_1,$$

因此我们知道 e_1 是$\mathbb{P}^\gamma \circ f_*$ 特征值为 1 的特征向量,而行列式为 1 的正交矩阵的特征根的模为 1,具下列形式:

$$\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \cdots, \lambda_j, \bar{\lambda}_j, \underbrace{-1, \cdots, -1}_{r\text{个}}, \underbrace{+1, \cdots, +1}_{s\text{个}}.$$

由于 M 的维数为偶数,$r+s=$ 偶数,特征根为 $+1$ 的重数 s 必为偶数,即 $\mathbb{P}^\gamma \circ f_*$ 关于 $+1$ 的特征空间至少是 2 维,因此存在单位向量 $e \in T_pM$, $\langle e, \dot{\gamma}(0)\rangle = 0$,使$\mathbb{P}^\gamma \circ f_*(e) = e$. 于是,将 e 沿 γ 平行移动得到$e(t)$,而到达 $f(p)$ 恰为 $f_* e = e(l)$.

过点 p 沿 e 作测地线 ξ,使 $\xi(0) = p$, $\xi'(0) = e$. 作包含测地线 γ 的单参数曲线族$\gamma_u = \exp_{\gamma(t)} ue(t)$, $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $t \in [0, l]$,它的变分向量场为 $e(t)$. 由于 $f \circ \xi$ 也是测地线,因此过点 $f \circ \xi(0) = f(p)$,以$(f \circ \xi)'(0)$ 为方向,有 $(f \circ \xi)'(0) = f_* \xi'(0) = f_* e = e(l)$. 这说明 $\gamma_u(0) = \xi$, $\gamma_u(l) = f \circ \xi$,我们的单参数曲线族为连接 ξ 和 $f \circ \xi$ 的对应点的曲线族. 按点 p 的取法,我们有

$$d(p, f(p)) \leqslant d(\xi, f \circ \xi) \leqslant L(\gamma_u).$$

另一方面,将单参数曲线族的变分向量场 $e(t)$代入第二变分公式(11.3),其中边界项消失且考虑到 $e(t)$沿 γ 的平行性,得到

$$L''(0) = -\int_0^l \langle R(\dot{\gamma}, e)\dot{\gamma}, e\rangle \mathrm{d}t.$$

根据正截面曲率的假定,上述积分是负的.这和 γ 是单参数曲线族中的最短曲线相矛盾.因此,f 至少有一个不动点.

证迄

定理 11.9(J. L. Synge,1936) 设 M 是具有正截面曲率的偶数维紧致可定向 Riemann 流形,那么,M 是单连通的.

证明 取 $\pi: \widetilde{M} \to M$ 为通用覆盖.在$\widetilde{M}$上定义定向,使 π 是保持定向的.在$\widetilde{M}$上定义拉回度量 $\pi^* g$,使 π 是局部等距的.如所知$\widetilde{M}$关于 $\pi^* g$ 是完备的.又由于 M 是紧的,截面曲率为正,因此必有正下界,从而$\widetilde{M}$的截面曲率有正下界.根据 Bonnet-Meyers 定理,$\widetilde{M}$也是紧的.

考虑$\widetilde{M}$上的任一覆盖自同构 $h: \widetilde{M} \to \widetilde{M}$,即满足 $\pi \circ h = \pi$ 的 h,它是保定向的等距,根据上面证明的 Weinstein 定理,h 必有不动点.而具有不动点的覆盖自同构 h 只可能是恒等映照.我们知道基本群 $\pi_1(M)$和$\widetilde{M}$的覆盖自同构群是同构的.这就证明了 M 的单连通性.

证迄

12 Morse 指标形式与 Morse 指标定理

对于欧氏空间中的函数,有了它沿曲线的二阶导数,相应地就有了这个函数的 Hessian. 现在,我们有了 Riemann 流形 M 中弧长的第二变分公式,也可考虑测地线 $\gamma:[0,\,b]\to M$ 的相关二次型.

我们首先研究它的代数性质和测地线极小性的关系,再进一步证明深刻的 **Morse 指标定理**.

设 $\gamma:[0,\,b]\to M$ 是以弧长为参数的测地线, $\gamma_u:[0,\,b]\to M$ 是 γ 的单参数曲线族. 设 U 是它的横截向量场. 这里都假定它与测地线 γ 正交. 我们前面已推导了第二变分公式(11.3):

$$L''(0)=\langle\nabla_U U,\,\dot{\gamma}\rangle\,|_0^b+\int_0^b(|\,\dot{U}\,|^2-\langle R(\dot{\gamma},\,U)\,\dot{\gamma},\,U\rangle)\mathrm{d}t.$$

引进空间

$$\mathcal{V}=\{沿\ \gamma\ 的分段光滑向量场\ X(t);且\ \forall\,t\in[0,\,b],\,\langle X,\,\dot{\gamma}\rangle=0\},$$
$$\mathcal{V}_0=\{V\in\mathcal{V};\,V(0)=V(b)=0\}.$$

$\mathcal{V}_0$ 显然是沿着 γ 的固定端点变分的横截向量场的全体.

在$\mathcal{V}$上引进双线性对称二次型

$$I(V,\,W)=\int_0^b(\langle\dot{V}(t),\,\dot{W}(t)\rangle-\langle R(\dot{\gamma},\,V(t))\,\dot{\gamma},\,W(t)\rangle)\mathrm{d}t.\qquad(12.1)$$

这就是测地线 γ 的 **Morse 指标形式**. 因此,对横截向量场 U 在$\mathcal{V}_0$ 中的 γ 的变分 γ_u,有

$$L''(0)=I(U,\,U).$$

我们来研究指标形式的代数性质与测地线 γ 的极小性之间的关系.

命题 12.1 设 $\gamma:[0,\,b]\to M$ 是以弧长为参数的测地线,那么,对 $U\in\mathcal{V}$,使 $I(U,\,\mathcal{V}_0)=0$ 的充要条件为 U 是沿 γ 的 Jacobi 场.

证明 如果 $V,\,W\in\mathcal{V}$, 并且 V 是光滑的,并且假定对 $[c,\,d]\subset[0,\,b]$, $W|_{[c,\,d]}$是光滑的,那么在$[c,\,d]$上,有

$$\langle \dot{V}, \dot{W} \rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \dot{V}, W \rangle - \left\langle \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}t^2}, W \right\rangle.$$

代入(12.1)式得到

$$I(V, W) = \langle \dot{V}, W \rangle \big|_0^b - \int_0^b \langle \ddot{V} + R(\dot{\gamma}, V)\,\dot{\gamma}, W \rangle \mathrm{d}t. \tag{12.2}$$

由此可知当 V 是 Jacobi 场，$W \in \mathcal{V}_0$ 时，显然有 $I(V, W) = 0$，命题的充分性得证.

一般地，如果 V 也是分断光滑的，设有分割 $0 = a_0 < a_1 \cdots < a_k < a_{k+1} = b$，使 V 在每个 $[a_i, a_{i+1}]$ 上是光滑的，记

$$V_i = V \big|_{[a_i,\, a_{i+1}]},$$

那么从(12.2)式可得到

$$I(V, W) = \sum_{i=0}^{k} \langle \dot{V}_i(t), W(t) \rangle \Big|_{a_i}^{a_{i+1}} - \sum_{i=0}^{k} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle \ddot{V}_i + R(\dot{\gamma}, V_i)\,\dot{\gamma}, W \rangle \mathrm{d}t. \tag{12.3}$$

反之，如果对 $U \in \mathcal{V}$，使 $I(U, \mathcal{V}_0) = 0$，要证明 U 是光滑的 Jacobi 场，先要证明 U 是分段 Jacobi 场. 为此，设 U 在$[a_i, a_{i+1}]$上是光滑的. 取$[0, b]$上的光滑函数 f，满足 $f(a_i) = 0$ 并且在其余处都有 $f > 0$. 令

$$W = f(\ddot{U} + R(\dot{\gamma}, U)\,\dot{\gamma}),$$

那么，$W \in \mathcal{V}_0$. 从(12.3)式得到

$$0 = I(U, W) = -\sum_{i=0}^{k} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\, | \ddot{U}_i + R(\dot{\gamma}, U_i)\,\dot{\gamma} |^2 \mathrm{d}t.$$

从而，在每个区间 $[a_i, a_{i+1}]$ 上，$U_i = U \big|_{[a_i,\, a_{i+1}]}$ 是 Jacobi 场，即 U_i 满足

$$\ddot{U}_i + R(\dot{\gamma}, U_i)\,\dot{\gamma} = 0. \tag{12.4}$$

再证明 U 的一阶导数连续.

取定某 j，定义 $W \in \mathcal{V}_0$，使对 $i \neq j$，$W(a_i) = 0$，而

$$W(a_j) = \dot{U}_j(a_j) - \dot{U}_{j-1}(a_j).$$

将 U 和上述定义的 W 代入(12.3)式并考虑到(12.4)式，我们有

$$0 = I(U, W) = \sum_{i=0}^{k} (\langle \dot{U}_i(a_{i+1}), W(a_{i+1}) \rangle - \langle \dot{U}_i(a_i), W(a_i) \rangle)$$

$$= \langle \dot{U}_{j-1}(a_j), \dot{U}_j(a_j) - \dot{U}_{j-1}(a_j) \rangle - \langle \dot{U}_j(a_j), \dot{U}_j(a_j) - \dot{U}_{j-1}(a_j) \rangle$$
$$= - | \dot{U}_j(a_j) - \dot{U}_{j-1}(a_j) |^2.$$

上式对 $j = 1, \cdots, k$ 均成立. 根据 Jacobi 场由初始条件的决定性可知,在每个子区间的 Jacobi 场合成整个 Jacobi 场 U.

证迄

命题 12.1 说明 Jacobi 场构成指标形式的零化空间.

命题 12.2 如果 $\gamma(0)$ 沿测地线 $\gamma:[0, b] \to M$ 无共轭点,那么指标形式在 $\mathcal{V}_0$ 上是正定的.

附注 要证明的性质说明如果测地线没有共轭点,那么它在其邻近的曲线中是最短的. 我们下面采用"代数证明",它易于推广到无焦点的相应命题.

证明 取 $\gamma(b)$ 点的幺正基 $\{\dot{\gamma}(b), e_i\}$, $i = 2, \cdots, n$. 根据引理 7.9,沿 γ 存在唯一 Jacobi 场 J_i, 使 $J_i(0) = 0$, $J_i(b) = e_i$, $\langle e_i, \dot{\gamma}(b) \rangle = 0$, 那么, $\langle J_i, \dot{\gamma} \rangle = 0$. 又由于 $\gamma(0)$ 在 $\gamma(0, b]$ 中无共轭点,因此 J_i 点点线性独立.

对任何 $U \in \mathcal{V}_0$, $U = f_i J_i$, $f_i(b) = 0$. 代入指标形式(12.1),我们有

$$\begin{aligned} I(U, U) &= \int_0^b (\langle \dot{f}_i J_i, \dot{f}_j J_j \rangle + f_i f_j \langle \dot{J}_i, \dot{J}_j \rangle + f_i \dot{f}_j \langle \dot{J}_i, J_j \rangle \\ &\quad + \dot{f}_i f_j \langle J_i, \dot{J}_j \rangle - \langle R(\dot{\gamma}, f_i J_i) \dot{\gamma}, f_j J_j \rangle) \mathrm{d}t \\ &\overset{\text{def}}{=} A + B + C + D - E. \end{aligned}$$

利用 Jacobi 方程和曲率张量的性质可得 $(\langle \dot{J}_i, J_j \rangle - \langle J_i, \dot{J}_j \rangle)' = 0$, 考虑到 $J_i(0) = J_j(0) = 0$, 我们得到 $\langle \dot{J}_i, J_j \rangle = \langle J_i, \dot{J}_j \rangle$. 因而

$$\begin{aligned} B &= \int_0^b f_i f_j \langle \dot{J}_i, \dot{J}_j \rangle \mathrm{d}t \\ &= \int_0^b [(f_i f_j \langle \dot{J}_i, J_j \rangle)' - \dot{f}_i f_j \langle \dot{J}_i, J_j \rangle \\ &\quad - f_i \dot{f}_j \langle \dot{J}_i, J_j \rangle - f_i f_j \langle \ddot{J}_i, J_j \rangle] \mathrm{d}t \\ &= f_i f_j \langle \dot{J}_i, J_j \rangle |_0^b - C - D + E = - C - D + E. \end{aligned}$$

代入前一式得到

$$I(U, U) = \int_0^b \langle \dot{f}_i J_i, \dot{f}_j J_j \rangle \mathrm{d}t \geqslant 0.$$

等号成立的充要条件是 $\dot{f}_i = 0$, f_i 是常数. 而 $f_i(b) = 0$, 这导致 $U = 0$. 因而证明了指标形式在 $\mathcal{V}_0$ 的正定性.

证迄

命题 12.3 设 $\gamma:[0, b]\to M$ 是以弧长为参数的测地线，$\gamma(0)$ 沿 γ 无共轭点. 如果 $V, W\in\mathcal{V}$, $V(0)=W(0)$, $V(b)=W(b)$, V 是 Jacobi 场，那么，$I(V, V)\leqslant I(W, W)$，并且等号成立的充要条件是 $V\equiv W$.

证明 由于 $V-W\in\mathcal{V}_0$，根据命题 12.2，有

$$0\leqslant I(V-W, V-W)=I(V, V)-2I(V, W)+I(W, W). \quad (12.5)$$

从(12.2)式得到

$$I(V, V)=\langle\dot{V}, V\rangle\Big|_0^b,$$

$$I(V, W)=\langle\dot{V}, W\rangle\Big|_0^b\overset{\text{端点假设}}{=}\langle\dot{V}, V\rangle\Big|_0^b.$$

将上面式子代入(12.5)式得到

$$0\leqslant I(V-W, V-W)=-I(V, V)+I(W, W),$$

等号成立的充要条件为 $V-W\equiv 0$.

证迄

附注 对无焦点情形，相应命题成立.

命题 12.4 对弧长为参数的测地线 $\gamma:[0, b]\to M$，如果 $\gamma(b)$ 是 $\gamma(0)$ 的共轭点，而对 $\forall t\in(0, b)$，$\gamma(t)$ 都不是 $\gamma(0)$ 的共轭点，那么指标形式在 $\mathcal{V}_0$ 中是半正定的，但不是正定的.

证明 任取 $c\in(0, b)$. 沿 γ 取一平行移动生成的标架场 $\{E_1(t), \cdots, E_n(t)\}$，使 $E_1(t)=\dot{\gamma}(t)$. 设 $V\in\mathcal{V}_0(0, b)$，那么

$$V(t)=\sum_{i=2}^n f_i(t)E_i(t),$$

其中 $f_i(0)=f_i(b)=0$. 定义 $\tau:\mathcal{V}_0(0, b)\to\mathcal{V}_0(0, c)$ 为

$$\tau(V)(t)=\sum_{i=2}^n f_i\Big(\frac{b}{c}t\Big)E_i\Big(\frac{b}{c}t\Big),$$

那么，$\tau(V)\in\mathcal{V}_0(0, c)$. 应用命题 12.3 得到 $I^c(\tau(V), \tau(V))>0$. 可直接验证当 $c\to b$ 时，它趋向于 $I(V, V)$，所以，$I(V, V)\geqslant 0$.

引理 12.5 设 $\gamma:[0, b]\to M$ 是以弧长为参数的测地线，$\gamma(b)$ 是 $\gamma(0)$ 的共轭点（焦点），那么，沿 γ 的任何 Jacobi 场 U, $U(0)=U(b)=0$（$\dot{U}(0)=U(b)=0$），必使 $I(U, U)=0$.

证明 从(12.2)式即得

$$I(U, U) = \langle \dot{U}, U \rangle |_0^b = 0.$$

证迄

命题 12.6 设 $\gamma:[0, b] \to M$ 是以弧长为参数的测地线,$\gamma(0)$ 与 $\gamma(c)$ 共轭,$0 < c < b$ 的充要条件是对某 $V \in \mathcal{V}_0(0, b)$ 使 $I(V, V) < 0$.

证明 从命题 12.2 和命题 12.4 立即得到充分性. 现证明必要性. 沿测地线 γ 存在非零正交 Jacobi 场 J_1,使 $J_1(0) = J_1(c) = 0$. 令

$$J = \begin{cases} J_1 & t \in [0, c], \\ 0 & t \in [c, b]. \end{cases}$$

根据引理 12.5,有

$$I(J, J) = I^c(J_1, J_1) = 0. \tag{12.6}$$

取 δ 充分小,使 $\exp_{\gamma(c+\delta)}: B(3\delta) \to B_{3\delta}$ 是微分同胚,其中 $B(3\delta)$ 是 $T_{\gamma(c+\delta)}M$ 上的半径为 3δ 的开球,$B_{3\delta}$ 是以 $\gamma(c+\delta)$ 为中心的距离球. 特别地,$\gamma(c-\delta)$ 不是 $\gamma(c+\delta)$ 的共轭点. 那么,根据引理 7.9,沿 $\gamma|_{[c-\delta, c+\delta]}$ 存在唯一的 Jacobi 场 V,满足 $V(c-\delta) = J_1(c-\delta)$, $V(c+\delta) = 0$. 定义沿整条测地线 γ 的向量场:

$$U = \begin{cases} J_1(t), \text{当 } t \in [0, c-\delta], \\ V(t), \text{当 } t \in [c-\delta, c+\delta], \\ 0, \text{当 } t \in [c+\delta, b]. \end{cases}$$

又由于 $\langle J_1, \dot{\gamma} \rangle = 0$, $\langle V, \dot{\gamma} \rangle = 0$, $U \in \mathcal{V}_0(0, b)$, 因此根据命题 12.3 和(12.6)式,有

$$\begin{aligned} I(U, U) &= I_0^{c-\delta}(J_1, J_1) + I_{c-\delta}^{c+\delta}(V, V) + I_{c+\delta}^b(0, 0) \\ &< I_0^{c-\delta}(J, J) + I_{c-\delta}^{c+\delta}(J, J) + I_{c+\delta}^b(J, J) \\ &= I(J, J) = 0, \end{aligned}$$

这就证明了命题.

证迄

命题 12.6 说明,如果测地线内部包含共轭点就一定不是最短的. 下面进一步讨论著名的 Morse 指标定理.

设 $\gamma:[0, 1] \to M$ 是 n 维 Riemann 流形 M 中的一条测地线. 如果 $\gamma(1)$ 是 $\gamma(0)$ 的共轭点,那么,$\mathcal{V}_0(0, 1)$ 中的 Jacobi 场组成的线性空间的维数称为该共轭点的重数. 对任何 Jacobi 场 $J \in \mathcal{V}_0(0, 1)$,我们有 $\langle \dot{J}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = \langle J(t), \dot{\gamma}(t) \rangle' \equiv 0$. 因而,$\dot{J}(1) \perp \dot{\gamma}(1)$. $J(1) = 0$ 的 Jacobi 场由 $\dot{J}(1)$ 决定,我们的分析说明 $\dot{J}(1)$ 落在 $T_{\gamma(1)}M$ 的 $n-1$ 维的子空间中. 这说明共轭点的重数不超过 $n-1$.

考虑$\mathcal{V}_0(0, 1)$上的指标形式 I. 它的**零化数**定义为

$$\nu(1) = \dim\{X \in \mathcal{V}_0(0, 1);\ I(X, \mathcal{V}_0) = 0\}.$$

它的**指标数**定义为

$$i(1) = \max\dim\{\mathcal{A} \subset \mathcal{V}_0(0, 1);\ I|_{\mathcal{A}} \text{ 为负定}\}.$$

$i(1)$和 $\nu(1)$都可能是无限的. 但是,命题 12.1 告诉我们,沿 γ 的 Jacobi 场构成指标形式在$\mathcal{V}_0$ 上的零化空间,$\nu(1)$因而是有限的,我们可写成下列引理. Morse 指标定理则意味着 $i(1)$也是有限的.

引理 12.7 对测地线 $\gamma:[0, 1] \to M$,那么,$\nu(1) = 0$,除非 $\gamma(1)$ 是 $\gamma(0)$ 的共轭点,此时 $\nu(1)$ 恰好是 $\gamma(1)$ 作为共轭点的重数.

对任何 $t \in [0, 1]$, 记 I^t 表示$\gamma|_{[0, t]}$在$\mathcal{V}_0(0, t)$中的指标形式,对应的指标数和零化数以 $i(t)$以及 $\nu(t)$表示.

定理 12.8

$$i(1) = \sum_{t<1}\nu(t) < \infty.$$

附注 从引理 12.7 和定理 12.8 可知 γ 在$\mathcal{V}_0(0, 1)$中的指标数等于 $\gamma(0)$沿 $\gamma|_{[0, 1)}$的共轭点数,当然,每个共轭点以重数计数. 着重指出,如果 $\gamma(1)$是$\gamma(0)$的共轭点,则它对指标数无贡献.

指标定理(定理 12.8)的证明中最重要的一步是在$\mathcal{V}_0(0, 1)$中分离出一个有限维子空间 T_1,使 I 在$\mathcal{V}_0$ 中的指标数和零化数与它限制在 T_1 中一样,这样首先证明了 $i(1)$是有限的.

为定义 T_1,分割区间$[0, 1]$. 考虑到 $\forall\,\gamma(t)$,存在它的邻域 U,使在 U 中任意两点只能用唯一的测地线相连接. 这样,存在有限个区域 U_0, …, U_k,它们覆盖了 $\gamma_{[0, 1]}$. 取 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = 1$,使 $\gamma_{[t_i, t_{i+1}]} \subset U_i$.

定义

$$T_1 = \{X \in \mathcal{V}_0(0, 1);X \text{ 在 } \gamma_{[t_i, t_{i+1}]} \text{ 是 Jacobi 场}\},$$

即 T_1 的元素是 $\gamma(t)$上的分段 Jacobi 场.

定义

$$T_2 = \{X \in \mathcal{V}_0(0, 1);\ X(t_i) = 0,\ \forall\, i = 0, \cdots, k\}.$$

引理 12.9

$$\mathcal{V}_0 = T_1 \oplus T_2,$$
$$I(T_1, T_2) = 0,$$
$$I|_{T_2} > 0.$$

证明 $\forall J \in T_1$ 定义 $\Phi(J) = (J(t_1), \cdots, J(t_k))$. 由于 $\gamma(t_i)$ 与 $\gamma(t_{i+1})$ 不共轭,因此,由在 $\gamma(t_i)$ 及 $\gamma(t_{i+1})$ 上的值 $J(t_i)$ 及 $J(t_{i+1})$ 唯一地决定了沿 $\gamma_{[t_i, t_{i+1}]}$ 的Jacobi场. 因此,$\Phi: T_1 \to T_{\gamma(t_1)}M \oplus T_{\gamma(t_2)}M \oplus \cdots \oplus T_{\gamma(t_k)}M$ 是线性同构. 因此,$\dim T_1 = nk < \infty$.

对任何 $X \in \mathcal{V}_0$,有 $J_X = \Phi^{-1}(X(t_1), \cdots, X(t_k)) \in X_1$. 显然,$X - J_X \in T_2$,并且 $X = J_x + (X - J_x)$. 因为 $\gamma(t_i)$ 和 $\gamma(t_{i+1})$ 不共轭,所以我们有 $X - J_X \not\subseteq T_1$,即 $T_1 \cap T_2 = \{0\}$. 这就证明了第一个结论.

对 $J_1 \in T_1$, $W \in T_2$, 从(12.3)式有

$$I(J_1, W) = \sum_{i=0}^{k} \langle \dot{J}_1(t), W(t) \rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \ddot{J}_1 + R(\dot{\gamma}, J_1)\dot{\gamma}, W \rangle \mathrm{d}t = 0.$$

因此,$I(T_1, T_2) = 0$. 引理的最后一个结论事实上是命题 12.3 的推论. $\forall W \in T_2$, 记 $W_i = W|_{[t_i, t_{i+1}]}$, 有

$$I(W, W) = \sum_{i=0}^{k} I_i(W_i, W_i) > 0.$$

证迄

从引理 12.9 可知,$i(1)$和 $\nu(1)$均等于指标形式 I 限制在有限维空间 T_1 中的指标数和零化数.

引理 12.10 *$i(\tau)$是 τ 的增函数.*

证明 若 $\tau < \tau'$,则对任何 $X \in \mathcal{V}_0(0, \tau)$, 令

$$X' = \begin{cases} X & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0 & \tau < t \leqslant \tau', \end{cases}$$

则 $X' \in \mathcal{V}_0(0, \tau')$. 如果 $I^{\tau}(X, X) < 0$, 则必有

$$I^{\tau'}(X', X') = I^{\tau}(X, X) < 0.$$

这样,我们有结论:如有$\mathcal{V}_0(0, \tau)$的 $i(\tau)$维的线性子空间$\mathcal{V}^{\tau}$,使 I^{τ} 在$\mathcal{V}^{\tau}$ 上是负定的,一定可得到$\mathcal{V}_0(0, \tau')$的 $i(\tau)$维线性子空间,使 $I^{\tau'}$ 在其上是负定的,因此,

$i(\tau) \leqslant i(\tau')$.

证迄

引理 12.11 对任何 $\tau \in (0, 1)$ 及所有充分小的 $\varepsilon > 0$，有

$$i(\tau) = i(\tau - \varepsilon).$$

证明 对固定的 τ，选取 $[0, 1]$ 的分割

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = 1,$$

使 $\tau \in (t_j, t_{j+1})$. 设 $T_1(\tau)$ 是沿着 $\gamma|_{[0,\tau]}$ 的分段 Jacobi 场全体，其间断点是 $t_1 < t_2 < \cdots < t_j$. 从前面的引理 12.9 知，$i(\tau) = I^\tau$ 是 $T_1(\tau)$ 上的指标数.

对任何 $X, Y \in T_1(\tau)$，从(12.3)式得

$$I^\tau(X, Y) = \sum_{i=0}^{j-1} \langle \dot{X}_i, Y \rangle \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - \langle \dot{X}_j(t_j), Y(t_j) \rangle, \tag{12.7}$$

其中 X_i 是 X 在 $[t_i, t_{i+1}]$ 上的限制，$i = 0, \cdots, j-1$. 而 X_j 是 X 在 $[t_j, \tau]$ 上的限制.

固定 $t_1, \cdots, t_j$，$T_1(\tau) \cong T_{\gamma(t_1)}M \oplus \cdots \oplus T_{\gamma(t_j)}M$ 是固定的向量空间. 当 τ 变化时，(12.7)式中只有 $\langle \dot{X}_j(t_j), Y(t_j) \rangle$ 随 τ 而变，其中 X_j 和 Y 为 $[t_j, \tau]$ 上 Jacobi 方程的解且满足边界条件 $X_j(\tau) = Y(\tau) = 0$. 而对固定的 X 和 Y，$X_j(t_j)$，$Y(t_j)$ 是固定的. 由于 $\gamma(t_j)$ 以及 $\gamma(\tau)$ 同在 U_{j+1} 内，在它们附近的测地线均是极小测地线且光滑地依赖于两个端点，X_j 和 Y 作为 $\gamma|_{[t_j,\tau]}$ 的单参数测地线族的横截向量场也连续地依赖于两个端点，因此当 τ 变动时，$\langle \dot{X}_j(t_j), Y(t_j) \rangle$ 连续地依赖于 τ，即 I^τ 是 $T_1(\tau)$ 上连续依赖于 τ 的双线性型. 如果 I^τ 在子空间 $A \subset T_1(\tau)$ 是负定的，那么，对 $\varepsilon > 0$，$I^{\tau-\varepsilon}$ 在 A 上也是负定的，因此，$i(\tau - \varepsilon) \geqslant i(\tau)$. 考虑到引理 12.10 即得 $i(\tau - \varepsilon) = i(\tau)$.

证迄

引理 12.12 对任何 $\tau \in (0, 1)$ 及所有充分小的 $\varepsilon > 0$，有 $i(\tau + \varepsilon) = i(\tau) + \nu(\tau)$.

证明 和引理 12.11 中的证明一样，设

$$T_1(\tau) \cong T_{\gamma(t_1)}M \oplus \cdots \oplus T_{\gamma(t_j)}M,$$

那么，I^τ 在 $T_1(\tau)$ 的 $nj - i(\tau) - \nu(\tau)$ 维子空间上是正定的. 如前所述，I^τ 关于 τ 是连续的. 那么，对充分小的 ε，$I^{\tau+\varepsilon}$ 在这个子空间也是正定的，即 $I^{\tau+\varepsilon}$ 在其上正定子空间的维数大于等于 $nj - i(\tau) - \nu(\tau)$，所以

$$i(\tau + \varepsilon) \leqslant nj - (nj - i(\tau) - \nu(\tau)) = i(\tau) + \nu(\tau).$$

证迄

定理 12.8 的证明 当 t 从 0 变到 1 时，在 0 的一个小邻域内 $\gamma(t)$ 是极小测地线，当 τ 充分小时，$i(\tau)=0$. 如果 $\gamma(\tau)$ 不是 $\gamma(0)$ 的共轭点，则对充分小的 ε，由引理 12.7，引理 12.11 以及引理 12.12 得

$$i(\tau-\varepsilon)=i(\tau)=i(\tau+\varepsilon).$$

所以这时指标数 i 在 τ 的一个邻域内为常数. 当 $\gamma(\tau)$ 是 $\gamma(0)$ 的共轭点时，引理 12.11 说明在 τ 的左端 i 仍然是常数，但在 τ 的右端有一个 $\nu(\tau)$ 跃度的跳跃. 因此，$i(\tau)$ 是一个从零开始的左连续的阶梯函数. 因此

$$i(1)=\sum_{s<1}\nu(s).$$

这就证明了指标定理. 由此可见，在 $\gamma(0)$ 到 $\gamma(1)$ 之间 $\gamma(0)$ 的共轭点是有限的. 每通过一个共轭点 i 就有一个 $\nu\geqslant 1$ 的跳跃，而跳跃总和 $i(1)$ 的有限性在引理 12.9 就证明了.

证迄

Morse 指标定理在几何和拓扑中有很多应用，参见 Milnor 著名的著作[16].

13 割迹和单射半径

共轭点是指数映照的临界值,它们只在一阶无穷小的意义下刻画了测地线的极小性. 命题 12.6 说明如果测地线内部包含共轭点就一定不是最短的. 但反过来就不一定成立. 最简单的例子是圆柱面,它的 Gauss 曲率处处为零,因而没有共轭点. 圆柱面上的纬圆是测地线. 当它超过半圆时显然不是极小测地线,尽管它和其邻近曲线比较时仍然是极小的. 我们再考察 $\mathbb{R}^3$ 中上半单位球面的表面,即

$$M' = \{(x,\ y,\ z): x^2 + y^2 + z^2 = 1, \text{当 } z > 0 \text{ 时};\\ x^2 + y^2 \leqslant 1, \quad \text{当 } z = 0 \text{ 时}\},$$

沿着边 $\{(x,\ y,\ 0): x^2+y^2=1\}$ 作适当修正,使之光滑而得到光滑曲面 M. 在靠近"边"的地方任取一点 x,从点 x 出发沿着边作测地线 γ. M 的上半部事实上是半球,所以当 γ 超过点 x 的对径点 y 足够远时,将有共轭点. 而在 x 和 y 之间 γ 上无共轭点,这时,它在邻近的曲线中是极小的. 但是,从 x 出发,直接下到 M 的底部,再直接从底部沿直线到达 y 的下方,再向上到达 y 的曲线 ζ. 不难见到 ζ 的长度将小于 γ 的长度. 这些例子说明,无一般的准则来判断一条测地线是否是极小测地线. 我们继续研究测地线的极小性质. 在这部分中总假定流形是完备的.

设 $\gamma:[0,\ \infty)\to M$ 是弧长为参数的测地线. 注意到 $\gamma|_{[0,\ t_0]}$ 是极小的充要条件为 $\mathrm{d}(\gamma(0),\ \gamma(t_0)) = t_0$. 当 $\gamma|_{[0,\ t_0]}$ 是极小时,对任何 $t < t_0$, $\gamma|_{[0,\ t]}$ 也是极小. 另一方面,根据测地线的局部极小性,对充分小的 t, $\gamma|_{[0,\ t]}$ 总是极小测地线. 因此,或者对任何 $t > 0$, $\gamma|_{[0,\ t]}$ 是极小的;或者存在 $t_0 > 0$,使当 $t \leqslant t_0$ 时,$\gamma|_{[0,\ t]}$ 是极小测地线,而当 $t > t_0$, $\gamma|_{[0,\ s]}$ 就不是极小测地线. 后一种情形 $\gamma(t_0)$ 就称为 $\gamma(0) = x$ 关于 γ 的**割点**. 而称 $t_0\dot{\gamma}(0)$ 为 γ 的**切向割点**.

从 x 出发的测地线 γ 随初始方向变化而变化时,γ 的所有割点的全体称为 x 点的**割迹**,记为 $\mathcal{C}(x)$,而对应的切向割点全体称为点 x 的**切向割迹** $C(x)$. 于是 $\mathcal{C}(x) = \exp_x C(x)$.

根据共轭点的性质,割点不会在第一共轭点之后出现,并且对无共轭点的测地线也会有割点,如圆柱面上的测地线. 而对球面,割点和第一共轭点是重合的. 一般地,我们有下列结果.

命题 13.1 设 $\gamma:[0, b]\to M$ 是以弧长为参数的测地线，$\gamma(t_0)$ 是 $x=\gamma(0)$ 的割点，那么，至少为下列情况之一：

(i) $\gamma(t_0)$ 是 x 沿 γ 的第一共轭点；

(ii) 存在不同于 γ 的连接 x 和 $\gamma(t_0)$ 的测地线 σ，使 $L(\sigma)=t_0$，并且 t_0 是这种情况的最小值.

证明 设 $\{t_i\}$ 是收敛于 t_0，$t_i>t_0$ 的序列. 设 σ_i 是连接 x 和 $\gamma(t_i)$ 的以弧长为参数的极小测地线. 根据假设 $L(\sigma_i)<t_i$. 设 $\sigma_i(0)=x$，那么，$\{\dot{\sigma}_i(0)\}$ 是 T_xM 中单位球面上的序列. 不妨假设它是收敛的(否则取其子序列)，即 $\dot{\sigma}_i(0)\to X\in T_xM$，$|X|=1$. 设 σ 是过 x 以 X 为初始切向的测地线. 根据测地线方程关于初始条件的依赖性，我们得到 σ_i 一致收敛于 σ，因此，σ 为连接 x 和 $\gamma(t_0)$ 的弧长为参数的测地线. 我们分下列两种情况讨论：

(i) 如果 $X=\dot{\gamma}(0)$，那么，σ_i 一致收敛于 $\gamma|_{[0,t_0]}$. 设 σ_i 的弧长为 s_i，那么，$\sigma_i(s_i)=\gamma(t_i)$. 根据割点的定义 $s_i<t_i$，从而

$$s_i\,\dot{\sigma}_i(0)\neq t_i\,\dot{\gamma}(0),$$

但是，它们在指数映照下的像

$$\exp_x(s_i\,\dot{\sigma}_i(0))=\sigma(s_i)=\gamma(t_i)=\exp_x(t_i\,\dot{\gamma}(0))$$

是相同的. 这说明，指数映照 $\exp_x$ 在 $t_0\dot{\gamma}(0)$ 的任意小的邻域内不是单的，即 $t_0\dot{\gamma}(0)$ 是 $d\exp_x$ 的奇点，也就是说 $\gamma(t_0)$ 是 x 沿 γ 的共轭点.

(ii) 如果 $X\neq\dot{\gamma}(0)$，那么，σ 和 γ 是过 x 和 $\gamma(t_0)$ 的不同测地线. 由连续性，有

$$L(\sigma)=\lim_i L(\sigma_i)\leqslant\lim_i t_i=t_0.$$

又因为 $\gamma(t_0)$ 是 x 的割点，即 $\gamma|_{[0,t_0]}$ 是极小测地线，那么

$$L(\sigma)\geqslant L(\gamma|_{[0,t_0]})=t_0.$$

这说明 $L(\sigma)=t_0$ 也是极小测地线. 最后要证明不存在 e，$0<e<t_0$，使 ζ 是连接 x 和 $\gamma(e)$ 的不同于 γ 的测地线，并且满足 $L(\zeta)=e$. 否则，曲线 $\zeta\cup\gamma|_{[e,t_0]}$ 的长度也是 t_0. 而曲线 $\zeta\cup\gamma|_{[e,t_0]}$ 不是光滑曲线，它在 $\gamma(e)$ 点有一角点. 因此，存在点 x 和点 $\gamma(t_0)$ 间的长度小于 t_0 的曲线，这与 $\gamma(t_0)$ 是点 x 的割点相矛盾.

证迄

命题 13.2 如果 q 是 p 沿测地线 γ 的割点，将 γ 反向得到 $\bar{\gamma}$，那么，p 是 q 关于 $\bar{\gamma}$ 的割点.

证明 由假设 $\bar{\gamma}$ 是 p，q 间的极小测地线，那么，q 沿 $\bar{\gamma}$ 的割点必在点 p 或 p

以外的点 p'. 从命题 13.1 可知 q 或者是 p 的第一共轭点,或者过 p, q 有两条不同的极小测地线. 当 q 是 p 的第一共轭点时, p 是 q 的第一共轭点, q 的割点不可能在第一共轭点后出现. 当之间有两条不同极小测地线时,根据命题 13.1,点 q 的割点也不可能在点 p 之后出现,因此, $p' = p$.

证迄

设 $x \in M$ 是任意一点. 假定$\mathcal{S}_x$ 是 T_xM 上的单位球面. 对 $X \in \mathcal{S}_x$, 定义$\mathcal{S}_x$ 上的函数:

$$\tau(X) = \begin{cases} \infty, \text{如果以 } x,\ X \text{ 为初始条件的测地线无割点;} \\ t_0, \text{如果以 } x,\ X \text{ 为初始条件的测地线 } \gamma_X(t) \text{ 以 } \gamma_X(t_0) \text{ 为割点.} \end{cases}$$

命题 13.3 **τ 是连续函数.**

证明 设$\mathcal{S}_x$ 中有序列 $X_i \to X$,我们来证明 $\tau(X_i) \to \tau(X)$. 对 $\tau(X_i)$的任一收敛于 a 的子序列,不妨仍记为 $\tau(X_i)$.

(i) 如果 $a = \infty$, 对任意固定的 t,它必小于无限多个 $\tau(X_i)$,不妨设当 i 充分大时, $t < \tau(X_i)$, 因此

$$\begin{aligned} d(x,\ \exp_x tX) &= d(x,\ \lim_{i \to \infty} \exp_x tX_i) \\ &= \lim_{i \to \infty} d(x,\ \exp_x tX_i) \\ &= t. \end{aligned}$$

这说明 $\tau(X) \geqslant t$.

(ii) 如果 $a < \infty$,那么, $\tau(X_i)X_i \to aX$, 有

$$\begin{aligned} d(x,\ \exp_x aX) &= d(x,\ \lim_{i \to \infty} \exp_x \tau(X_i)X_i) \\ &= \lim_{i \to \infty} d(x,\ \exp_x \tau(X_i)X_i) \\ &= \lim_{i \to \infty} \tau(X_i) = a. \end{aligned}$$

这说明 $\tau(X) \geqslant a$. 所以

$$\limsup \tau(X_i) \leqslant \tau(X). \tag{13.1}$$

进而,如果 $\tau(X) > a$, 那么, $\exp_x aX$ 不可能是 x 沿 $\exp_x tX$ 的共轭点,因此,指数映照在 aX 的某邻域 U 中是微分同胚. 由于 $\tau(X_i)X_i \to aX$, 不妨设 $\tau(X_i)X_i$均在 U 中,因此, $\exp_x \tau(X_i)X_i$ 不可能是 x 沿 $\exp_x tX_i$ 的共轭点. 根据命题 13.1,在 x 和 $\exp_x \tau(X_i)X_i$ 间存在另一条极小测地线,即对任何 i,存在 $Y_i \in \mathcal{S}_x$, 使

$$\exp_x \tau(X_i)X_i = \exp_x \tau(X_i)Y_i.$$

这说明 $\tau(X_i)Y_i$ 不在 U 中. 不妨设 $Y_i \to Y$, 那么, aY 作为 $\tau(X_i)Y_i$ 的极限也不在 U 中. 因此

$$\begin{aligned}\exp_x aY &= \lim_{i\to\infty} \exp_x \tau(X_i)Y_i \\ &= \lim_{i\to\infty} \exp_x \tau(X_i)X_i = \exp_x \lim_{i\to\infty} \tau(X_i)X_i \\ &= \exp_x aX.\end{aligned}$$

这说明 $\exp_x tX$ 和 $\exp_x tY$ 是 x 和 $\exp_x aX = \exp_x aY$ 间的不同极小测地线. 根据命题 13.1 的结论, 对任何 $b > a$, 测地线 $\exp_x tX\,(0 \leqslant t \leqslant b)$ 就不是极小测地线, 而与 $\tau(X) > a$ 相矛盾.

这说明对任何收敛于 $a < \infty$ 的 $\{\tau(X_i)\}$ 的子序列有 $\tau(X) \leqslant a$, 从而

$$\tau(X) \leqslant \liminf \tau(X_i).$$

结合(13.1)式, 我们得到

$$\tau(X) \leqslant \liminf \tau(X_i) \leqslant \limsup \tau(X_i) \leqslant \tau(X).$$

这就完成了证明.

证迄

推论 13.4 割迹和切向割迹 $\mathcal{C}(x)$, $C(x)$ 分别为 M 和 T_xM 上的闭集.

证明 对 $\mathcal{C}(x)$ 的任一极限点 y, 存在 $y_i \in \mathcal{C}(x)$, 使 $y_i \to y$. 设 $\gamma_i(t)$ 为 x 和 y_i 间的弧长为参数的极小测地线, 使 $\gamma_i(t_i) = y_i$, 那么, $t_i = \tau(\dot{\gamma}_i(0))$. 不妨设 $\dot{\gamma}_i(0) \to Y$, 所以

$$\begin{aligned}y = \lim_{i\to\infty} y_i &= \lim_{i\to\infty} \gamma_i(t_i) \\ &= \lim_{i\to\infty} \gamma_i(\tau(\dot{\gamma}_i(0))) \\ &= \lim_{i\to\infty} \exp_x \tau(\dot{\gamma}_i(0))\, \dot{\gamma}_i(0) \\ &= \exp_x \tau(Y)Y \in \mathcal{C}(x).\end{aligned}$$

这就证明了 $\mathcal{C}(x)$ 是闭集, 它在指数映照下的原像 $C(x)$ 当然也是闭集.

证迄

命题 13.5 完备 Riemann 流形 M 是紧的充要条件是对任何 $x \in M$, 切向割迹 $C(x)$ 同胚于单位球面 $\mathcal{S}_x \subset T_xM$.

证明 如果 M 是紧的, 设它的直径 $d(M) = \delta$, 那么, 从任一点 x 出发的弧长参数测地线 $\gamma: [0, \infty) \to M$, 在 $\gamma|_{[0,\delta+1]}$ 外就不可能是极小测地线, 因此, $\tau < \delta + 1$. 设 $\beta: \mathcal{S}_x \to C(x)$ 定义为

$$\beta(X) = \tau(X)X.$$

它显然是同胚.

反过来,如果 $C(x)$和$\mathcal{S}_x$ 同胚,则 $C(x)$是紧集.设 $A\subset\mathcal{S}_x$ 是$\mathcal{S}_x$ 上的子集,使 A 上的任一向量有切向割点,即

$$A\overset{\text{def}}{=}\tau^{-1}([0,\infty)),$$

那么,$\beta:A\to C(x)$定义为

$$\beta(X)=\tau(X)X.$$

β总是同胚,A 是紧集,因而是$\mathcal{S}_x$ 中的闭集.另一方面,对 $X\in A$,总存在 X 的邻域$U\subset A$.否则,存在 $X_i\to X$,而 $\tau(X_i)\to\infty$.根据命题 13.3,τ 是连续的,$\tau(X)=\infty$ 而与 $X\in A$ 矛盾.因而,A 又是开集.这就得到 $A=\mathcal{S}_x$.这说明从点 x 出发的任一测地线有割点,即对任何 $X\in\mathcal{S}_x$, $\tau(X)<\infty$.

设 $y\in M$ 是任意一点,存在连接 x 和 y 的极小测地线 γ,使 $d(x,y)=L(\gamma)\leqslant\tau(X)<\infty$. 这就得到流形 M 的直径 $d(M)<\infty$, 因而是紧 Riemann 流形.

证迄

下面我们考虑切向割迹的内部

$$\Sigma(x)=\{tX;\ X\in\mathcal{S}_x\text{ 并且 }0\leqslant t<\tau(X)\}.$$

命题 13.6 $\exp_x:\Sigma(x)\to M$ 是嵌入.

证明 首先注意到 $\exp_x$ 在 $\Sigma(x)$上是单映照.否则,存在 a_1X_1, $a_2X_2\in\Sigma(x)$,使 $\exp_xa_1X_1=\exp_xa_2X_2=q$, $X_i\in\mathcal{S}_x$, $a_i>0$, $a_i<\tau(X_i)$,而 $a_1X_1\neq a_2X_2$.不妨设 $a_1\leqslant a_2$.这样,对测地线 $\gamma_{X_2}(t)=\exp_xtX_2$ 在它的割点 $\exp_x\tau(X_2)X_2$之前就有一点,使 x 和 q 之间有两条不同极小测地线,而与命题 13.1 矛盾.

其次,由于第一共轭点不会在割点之前出现,dexp_x 在 $\Sigma(x)$中非异,这就证明了 $\exp_x$ 在 $\Sigma(x)$中是嵌入.

证迄

命题 13.7 $M=\exp_x\Sigma(x)\cup\mathcal{C}(x)$,并且 $\exp_x\Sigma(x)\cap\mathcal{C}(x)=\varnothing$.

证明 显然, $\exp_x\Sigma(x)\cup\mathcal{C}(x)\subset M$.另一方面,设对任何 $q\in M$,则存在 x 和q 之间的极小测地线 $\gamma(t)=\exp_xtv$, $v\in\mathcal{S}_x$, $\gamma(0)=x$,以及 $\gamma(a)=q$,显然,$a\leqslant\tau(v)$.如果 $a=\tau(v)$,那么,$q=\exp_xav\in\mathcal{C}(x)$;如果 $a<\tau(v)$,那么,$q\in\exp\Sigma(x)$.总之 $M\subset\exp_x\Sigma(x)\cup\mathcal{C}(x)$. 我们证明了第一个结论.

如果 $\exp_x\Sigma(x)\cap\mathcal{C}(x)\neq\varnothing$,则存在 $X\in\Sigma(x)$ 和 $Y\in C(x)$,使 $\exp_xX=$

$\exp_x Y = q$. 于是,q 是 x 沿 $\gamma_1(t) = \exp_x t\dfrac{Y}{|Y|}$ 的割点,所以

$$|Y| = d(x, q) \leqslant L\left(\exp_x t\frac{X}{|X|}\right) = |X|.$$

另一方面,考虑测地线 $\gamma_2(t) = \exp_x t\dfrac{X}{|X|}$. 由假设 $q = \exp_x X$ 在 x 沿 $\gamma_2(t)$ 的割点之前,所以,$|X| = d(x, q) \leqslant |Y|$. 联系到上一式得到 $|X| = |Y| = d(x, q)$. 这和命题 13.1 的结论在割点之前不可能有两条不同的极小测地线 $\gamma_1(t)$ 和 $\gamma_2(t)$ 相矛盾. 因此,M 是互不相交的 $\exp_x\Sigma(x)$ 和 $\mathcal{C}(x)$ 的并集.

证讫

根据命题 13.6,指数映照 $\exp_x$ 在 $\Sigma(x)$ 中是单映照,当然它在以 x 为中心、以 $r(x) = d(x, \mathcal{C}(x))$ 为半径的开球中是单的. 因此引入**单射半径**

$$i(M) = \inf_{x\in M} d(x, \mathcal{C}(x)).$$

当 M 是紧流形时,单射半径 $i(M)$ 关于其他几何量的下界估计在整体 Riemann 几何中是很重要的.

14 比较定理

Cartan-Hadamard 定理以及 Bonnet-Myers 定理有一个公共的特点,并给我们以启发. 在 Cartan-Hadamard 定理中,以欧氏空间为模型空间,以曲率小于等于 0 来代替欧氏空间的零曲率,那么,流形在微分同胚的意义下仍然类似于 $\mathbb{R}^n$;而在 Bonnet-Myers 定理中,以球面 S^n 为模型空间,以 Ricci 曲率大于等于 $n-1$ 来代替球面 S^n 的 Ricci 曲率 $n-1$, 那么,流形在紧致的意义下和 S^n 相类似. 这两个定理的公共特点,都是从模型空间出发,将流形与之比较,而得出所要研究流形的性质.

这里进一步展开这种技巧,得到更细致的定量结论,证明 Rauch 比较定理、Hessian 比较定理、Laplace 比较定理、三角形比较定理. 至于体积比较定理将在下面一部分中讨论.

比较定理可推广到 Finsler 几何中,相应的定理参阅[27],[20].

引理 14.1 *设 M 和 $\widetilde{M}$ 是 n 维 Riemann 流形. $\gamma:[0,b]\to M$ 以及 $\widetilde{\gamma}:[0,b]\to\widetilde{M}$ 分别是 M 以及 $\widetilde{M}$ 中以弧长为参数的测地线, J 以及 $\widetilde{J}$ 分别是沿着 γ 和 $\widetilde{\gamma}$ 的正交 Jacobi 场,使 $J(0)=\widetilde{J}(0)=0$, 且对某 $\beta\in[0,b]$, $|J(\beta)|=|\widetilde{J}(\beta)|$. 如果*

(i) *γ 无共轭点;*

(ii) *$\widetilde{K}(t)\leqslant K(t)$,*

其中

$$\widetilde{K}(t)=\max\{\text{在 } T_{\widetilde{\gamma}(t)}\widetilde{M} \text{ 中包含} \dot{\widetilde{\gamma}}(t) \text{ 的所有平面的截面曲率}\},$$
$$K(t)=\min\{\text{在 } T_{\gamma(t)}\widetilde{M} \text{ 中包含} \dot{\gamma}(t) \text{ 的所有平面的截面曲率}\},$$

那么

$$\langle\dot{J}(\beta),J(\beta)\rangle\leqslant\langle\dot{\widetilde{J}}(\beta),\widetilde{J}(\beta)\rangle. \tag{14.1}$$

证明 由于 γ 无共轭点,因此 $|J(\beta)|=|\widetilde{J}(\beta)|\neq 0$. 沿 γ 取平行移动生成的幺正标架场 $\{e_i\}$, 使 $e_1=\dot{\gamma}$, $J(\beta)=\alpha e_2(\beta)$, $\alpha>0$; 同样,有 $\{\widetilde{e}_i\}$, 使 $\widetilde{e}_1=\dot{\widetilde{\gamma}}$, $\widetilde{J}(\beta)=\alpha\widetilde{e}_2(\beta)$. 设

$$J(t)=\sum_{i=2}^{n}h_i(t)e_i(t),$$

$$\widetilde{J}(t)=\sum_{i=2}^{n}\widetilde{h}_i(t)\ \widetilde{e}_i(t).$$

显然有 $h_i(0)=\widetilde{h}_i(0)=0$; $h_j(\beta)=\widetilde{h}_j(\beta)=0$, $j>2$; $h_2(\beta)=\widetilde{h}_2(\beta)=\alpha$. 沿测地线 γ,定义向量场

$$J_1=\sum_{i=2}^{n}\widetilde{h}_i(t)e_i(t),$$

那么, $J_1(0)=0$, $J_1(\beta)=J(\beta)$. 显然$\langle J_1,\dot{\gamma}\rangle=0$. 根据命题 12.3,有

$$I^\beta(J,J)\leqslant I^\beta(J_1,J_1). \tag{14.2}$$

考虑到引理的条件

$$\begin{aligned}
I^\beta(J_1,J_1)&=\int_0^\beta(|\dot{J}_1|^2-\langle R(\dot{\gamma},J_1)\dot{\gamma},J_1\rangle)\mathrm{d}t\\
&=\int_0^\beta(\sum_i|\dot{\widetilde{h}}_i|^2-(\sum\widetilde{h}_i^2)K(\pi(\dot{\gamma},J_1)))\mathrm{d}t\\
&\leqslant\int_0^\beta(|\dot{\widetilde{J}}|^2-(\sum\widetilde{h}_i^2)K(t))\mathrm{d}t\\
&\leqslant\int_0^\beta(|\dot{\widetilde{J}}|^2-(\sum\widetilde{h}_i^2)\widetilde{K}(t))\mathrm{d}t\\
&\leqslant\int_0^\beta(|\dot{\widetilde{J}}|^2-(\sum\widetilde{h}_i^2)\widetilde{K}(\pi(\dot{\widetilde{\gamma}},\widetilde{J})))\mathrm{d}t\\
&=\int_0^\beta(|\dot{\widetilde{J}}|^2-\langle\widetilde{R}(\dot{\widetilde{\gamma}},\widetilde{J})\dot{\widetilde{\gamma}},\widetilde{J}\rangle)\mathrm{d}t\\
&=\widetilde{I}^\beta(\widetilde{J},\widetilde{J}).
\end{aligned} \tag{14.3}$$

由于 J 和$\widetilde{J}$都是 Jacobi 场,因此从(12.2)式、(14.2)式和(14.3)式即得我们要证明的(14.1)式.

证迄

附注 从证明过程可见,当曲率条件是严格不等式时,(14.1)式也就变成严格不等式.

我们来证明下列 **Rauch 比较定理**(定理 14.2).

定理 14.2 设 M 和$\widetilde{M}$是 n 维 Riemann 流形, $x\in M$, $\widetilde{x}\in\widetilde{M}$, $\phi:T_xM\to T_{\widetilde{x}}\widetilde{M}$是线性等距,$v\in T_xM$, $\widetilde{v}=\phi(v)$. 设 $\gamma:[0,1]\to M$ 以及$\widetilde{\gamma}:[0,1]\to\widetilde{M}$ 分别是 M 以及$\widetilde{M}$ 中的测地线,$\gamma(t)=\exp_x tv$, $\widetilde{\gamma}=\exp_{\widetilde{x}}t\widetilde{v}$. 设 $X\in T_xM$, $\widetilde{X}=\phi(X)$ 分别看成在 T_xM 和 $T_{\widetilde{x}}\widetilde{M}$在 v 和$\widetilde{v}$的切向量. 假定

(i) γ 无共轭点;

(ii) $\widetilde{K}(t) \leqslant K(t)$,

其中$\widetilde{K}(t)$和 $K(t)$的意义同引理 14.1,那么

$$|\,\mathrm{dexp}_x X\,| \leqslant |\,\mathrm{dexp}_{\tilde{x}} \widetilde{X}\,|. \tag{14.4}$$

附注 由于指数映照在径向等距,且考虑到 Gauss 引理,因此我们只要对 $X \perp v$, $\widetilde{X} \perp \tilde{v}$ 的情形进行证明.

定义 M 上的单参数测地线族

$$\gamma_u(t) = \exp_x t(v + uX),$$

那么,它的横截向量场 U 是 Jacobi 场,显然有

$$U(0) = 0,\ \dot{U}(0) = X,\ U(1) = \mathrm{dexp}_x X.$$

同样可得$\widetilde{M}$上的 Jacobi 场 $\widetilde{U}$,满足

$$\widetilde{U}(0) = 0,\ \dot{\widetilde{U}}(0) = \widetilde{X},\ \widetilde{U}(1) = \mathrm{dexp}_{\tilde{x}} \widetilde{X}.$$

我们可将 Rauch 比较定理化为它的等价形式如下.

定理 14.3 设 $\gamma:[0, b] \to M$ 以及$\tilde{\gamma}:[0, b] \to \widetilde{M}$分别是 M 以及$\widetilde{M}$ 中以弧长为参数的测地线,设 U 和$\widetilde{U}$是沿 γ 以及$\tilde{\gamma}$的 Jacobi 场,满足

$$U(0) = \widetilde{U}(0) = 0,\ \langle \dot{U}(0), \dot{\gamma}(0)\rangle = \langle \dot{\widetilde{U}}(0), \dot{\tilde{\gamma}}(0)\rangle = 0,\ |\,\dot{U}(0)\,| = |\,\dot{\widetilde{U}}(0)\,|,$$

在和定理 14.2 一样的假定下,对任何 $t \in [0, b]$,有

$$|\,U(t)\,| \leqslant |\,\widetilde{U}(t)\,|. \tag{14.5}$$

证明 从 Jacobi 场在测地线方向及其正交方向分解的性质立即可知 U 和 $\widetilde{U}$都是正交 Jacobi 场. 令

$$f(t) = \langle U(t), U(t)\rangle,$$
$$\tilde{f}(t) = \langle \widetilde{U}(t), \widetilde{U}(t)\rangle.$$

先设 f 和 $\tilde{f}$ 在$(0, c) \subset [0, b]$ 中为正,那么,对任何 $\beta \in (0, c)$, 令

$$J(t) = \frac{U(t)}{|\,U(\beta)\,|},\ \widetilde{J}(t) = \frac{\widetilde{U}(t)}{|\,\widetilde{U}(\beta)\,|}.$$

因此,$J(t)$和$\widetilde{J}(t)$分别是沿 γ 以及$\tilde{\gamma}$ 的正交 Jacobi 场,并且 $|\,J(\beta)\,| = 1 = |\,\widetilde{J}(\beta)\,|$. 根据引理 14.1 得到

$$\langle \dot{J}(\beta), J(\beta)\rangle \leqslant \langle \dot{\widetilde{J}}(\beta), \widetilde{J}(\beta)\rangle,$$

即

$$\frac{\langle\dot{U}(\beta),U(\beta)\rangle}{\langle U(\beta),U(\beta)\rangle}\leqslant\frac{\langle\dot{\widetilde{U}}(\beta),\widetilde{U}(\beta)\rangle}{\langle\widetilde{U}(\beta),\widetilde{U}(\beta)\rangle}.$$

对任何 $t\in(0,c)$，有

$$\frac{f'(t)}{f(t)}\leqslant\frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{f}(t)}.$$

将上式两边从 ε 到 t 积分，得到

$$\log f(t)\Big|_{\varepsilon}^{t}\leqslant\log\tilde{f}(t)\Big|_{\varepsilon}^{t}.$$

所以有

$$\frac{\tilde{f}(t)}{f(t)}\geqslant\frac{\tilde{f}(\varepsilon)}{f(\varepsilon)},$$

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{f}(t)}{f(t)}&\geqslant\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\tilde{f}(\varepsilon)}{f(\varepsilon)}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\tilde{f}'(\varepsilon)}{f'(\varepsilon)}\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\langle\dot{\widetilde{U}}(\varepsilon),\widetilde{U}(\varepsilon)\rangle}{\langle\dot{U}(\varepsilon),U(\varepsilon)\rangle}\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\langle\ddot{\widetilde{U}}(\varepsilon),\widetilde{U}(\varepsilon)\rangle+|\dot{\widetilde{U}}(\varepsilon)|^2}{\langle\ddot{U}(\varepsilon),U(\varepsilon)\rangle+|\dot{U}(\varepsilon)|^2}=\frac{|\dot{\widetilde{U}}(0)|^2}{|\dot{U}(0)|^2}=1.\end{aligned}$$

到现在为止我们已经证明了对任何 $t\in(0,c)$，如果 $\tilde{f}(t)>0$ 以及 $f(t)>0$，那么

$$\tilde{f}(t)\geqslant f(t).\tag{14.6}$$

根据假设 γ 无共轭点，所以在整个区间 $(0,b]$ 上总有 $f(t)>0$. 另一方面，如果 $\tilde{f}(t)>0$ 的极大区间为 $(0,c)$，从(14.6)式得到

$$\tilde{f}(c)\geqslant f(c)>0,$$

与假设矛盾. 因而(14.5)式得证.

证讫

附注 还有另一类 Rauch 比较定理，它联系于焦点的概念. 我们叙述如下.

设 $\gamma:[0,b]\to M$ 以及 $\tilde{\gamma}:[0,b]\to\widetilde{M}$ 分别是 M 以及 $\widetilde{M}$ 中以弧长为参数的测地线，设 U 和 $\widetilde{U}$ 是沿 γ 以及 $\tilde{\gamma}$ 的 Jacobi 场，满足

$$\dot{U}(0)=\dot{\widetilde{U}}(0)=0,\ \langle U(0),\dot{\gamma}(0)\rangle=\langle\widetilde{U}(0),\dot{\tilde{\gamma}}(0)\rangle=0,\ |U(0)|=|\widetilde{U}(0)|.$$

假定

(i) γ 无焦点；

(ii) $\widetilde{K}(t) \leqslant K(t)$,

其中$\widetilde{K}(t)$和 $K(t)$的意义同引理 14.1,那么,对任何 $t \in [0, b]$, 有

$$|U(t)| \leqslant |\widetilde{U}(t)|.$$

推论 14.4 设 M 是完备 Riemann 流形,它的截面曲率非正,那么,对任何 $x \in M$, $\exp_x: T_xM \to M$ 是下述意义下距离不减的映照:对 T_xM 中的任何向量 X,有

$$|\mathrm{d}\exp_x X| \geqslant |X|. \tag{14.7}$$

附注 前面我们证明了曲率非正的流形一定没有共轭点. 这里给出更强的结论.

推论 14.5 设 M 是完备单连通截面曲率非正的 Riemann 流形. 设 ABC 是 M 中的测地三角形,它的 3 个角为 A, B, C,对应的 3 条边长为 a, b, c,那么

(i) $a^2 + b^2 - 2ab\cos C \leqslant c^2$;

(ii) $A + B + C \leqslant \pi$.

并且,当 M 具负曲率时,上述为严格不等式.

证明 (i) 设$\angle C$ 的顶点为 x,它的对边弧$\widehat{AB}$为测地线γ_C,它的弧长是 c. 在 T_xM 中作过原点的三角形$\triangle QOP$,使 $\widehat{QO} = b$, $\angle QOP = C$, $\widehat{PO} = a$,那么, $\exp_x^{-1}\gamma_C = \zeta$. 应用推论 14.4,得到

$$c = \int |\dot{\gamma}_C| \mathrm{d}t = \int |\mathrm{d}\exp_x \zeta| \mathrm{d}t \geqslant \int |\zeta| \mathrm{d}t = L(\zeta).$$

这就证明了

$$c^2 \geqslant L^2(\zeta) \geqslant \overline{PQ} = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

(ii) 由于 a, b, c 满足三角不等式,我们可以在平面 $\mathbb{R}^2$ 中作以 a, b, c 为边长的三角形,它们的对角分别为 A', B', C'. 根据(i)的结论,得到

$$\cos C' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \leqslant \cos C.$$

这就得到 $C \leqslant C'$, 同理可得 $B \leqslant B'$, $A \leqslant A'$, 因此

$$A + B + C \leqslant A' + B' + C' = \pi.$$

证迄

在 Rauch 比较定理中,测地线 γ 无共轭点的条件是必要的,否则定理不成立. 我们有下列例子.

例 14.1 设$\widetilde{M} = S^2(3)$,而$M = S^2(2)$,那么,$\widetilde{K} = \frac{1}{9}$, $K = \frac{1}{4}$. 考察测地线$\tilde{\gamma}:[0, 3\pi] \to S^2(3)$,以及$\gamma:[0, 3\pi] \to S^2(2)$. 设$\widetilde{U}$和$U$为相应的正交 Jacobi 场,并且

$$\widetilde{U}(0) = 0, \ |\dot{\widetilde{U}}(0)| = 1;$$
$$U(0) = 0, \ |\dot{U}(0)| = 1.$$

设$\widetilde{W}$和W为沿$\tilde{\gamma}$以及γ的测地线正交的平行单位向量场,那么

$$\widetilde{U}(t) = \tilde{f}(t)\widetilde{W}, \ U(t) = f(t)W(t),$$

其中,$\tilde{f}$和f满足方程以及初始条件

$$f'' + \frac{1}{4}f = 0; \ f(0) = 0, \ f'(0) = 1;$$
$$\tilde{f}'' + \frac{1}{9}\tilde{f} = 0; \ \tilde{f}(0) = 0, \ \tilde{f}'(0) = 1.$$

容易得到

$$f = 2\sin\frac{t}{2}, \ \tilde{f} = 3\sin\frac{t}{3}.$$

我们总有

$$f(t) \leqslant \tilde{f}(t).$$

当$t \in [0, 2\pi]$时,γ只有共轭点$\gamma(2\pi)$,且

$$|\widetilde{U}(t)| = |\tilde{f}(t)| \geqslant |f(t)| = |U(t)|,$$

的确如 Rauch 比较定理所断言的. 但是

$$|\widetilde{U}(3\pi)| = |\tilde{f}(3\pi)| = 0 < 2 = |f(3\pi)| = |U(3\pi)|,$$

问题就出在$\gamma:[0, 3\pi] \to S^2(2)$包含共轭点$\gamma(2\pi)$.

习题 设 Riemann 流形M的截面曲率K满足$0 < L \leqslant K \leqslant H$,其中$H$和$L$是常数. 设$\gamma$是$M$中的测地线,那么,$\gamma$上相邻共轭点沿着$\gamma$的距离$d$满足

$$\frac{\pi}{\sqrt{H}} \leqslant d \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{L}}.$$

现在来考察 **Hessian 比较定理**(定理 14.6).

定理 14.6 设M和$\widetilde{M}$是n维 Riemann 流形,$\gamma:[0, b] \to M$以及$\tilde{\gamma}:[0, b] \to$

$\widetilde{M}$分别是M以及$\widetilde{M}$中以弧长为参数的测地线，设$x=\gamma(0)$，$\tilde{x}=\tilde{\gamma}(0)$，$\rho$和$\tilde{\rho}$是$M$和$\widetilde{M}$上从$x$及$\tilde{x}$出发的距离函数. 令

$$\widetilde{K}(t) = \max\{\text{在 } T_{\tilde{\gamma}(t)}\widetilde{M} \text{ 中包含}\dot{\tilde{\gamma}}(t)\text{ 的所有平面的截面曲率}\},$$
$$K(t) = \min\{\text{在 } T_{\gamma(t)}\widetilde{M} \text{ 中包含}\dot{\gamma}(t)\text{ 的所有平面的截面曲率}\}.$$

如果

(i) γ和$\tilde{\gamma}$都是不含割点的极小测地线；

(ii) 对任何t，$\widetilde{K}(t)\leqslant K(t)$，

那么，ρ和$\tilde{\rho}$在γ以及$\tilde{\gamma}$附近(除x及$\tilde{x}$)是光滑的，并且沿着$\tilde{\gamma}$和γ有$\nabla^2\rho\leqslant\nabla^2\tilde{\rho}$.

附注 这里$\nabla^2\rho\leqslant\nabla^2\tilde{\rho}$意味着对任何$t\in(0,b]$，设$X\in T_{\gamma(t)}M$，$\widetilde{X}\in T_{\tilde{\gamma}(t)}\widetilde{M}$，满足$|X|=|\widetilde{X}|$，$\langle X,\dot{\gamma}(t)\rangle=\langle\widetilde{X},\dot{\tilde{\gamma}}(t)\rangle$，那么

$$\nabla^2\rho(X,X)\leqslant\nabla^2\tilde{\rho}(\widetilde{X},\widetilde{X}). \tag{14.8}$$

证明 对任何X有分解$X=a\dot{\gamma}(t)+X^{\perp}$，其中$\langle X^{\perp},\dot{\gamma}\rangle=0$. 同样，有$\widetilde{X}=a\dot{\tilde{\gamma}}(t)+\widetilde{X}^{\perp}$.

考虑到

$$\begin{aligned}\nabla^2\rho(\dot{\gamma},\dot{\gamma}) &= \dot{\gamma}\dot{\gamma}\rho-(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma})\rho=\dot{\gamma}(t)(1)=0,\\ \nabla^2\rho(\dot{\gamma},X^{\perp}) &= X^{\perp}\dot{\gamma}\rho-(\nabla_{X^{\perp}}\dot{\gamma})\rho\\ &= X^{\perp}(1)-\langle\nabla_{X^{\perp}}\dot{\gamma},\operatorname{grad}\rho\rangle\\ &= -\langle\nabla_{X^{\perp}}\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle=0.\end{aligned}$$

而对$\widetilde{M}$也有相应的关系. 因此，我们只要对$X\perp\dot{\gamma}$，$\widetilde{X}\perp\dot{\tilde{\gamma}}$，$|X|=|\widetilde{X}|$，$t=b$证明(14.8)式即可.

设$\zeta:[0,\varepsilon]\to M$是以弧长为参数的测地线，使$\zeta(0)=\gamma(b)$，$\dot{\zeta}(0)=X$. 对任何$u\in[0,\varepsilon]$，$\gamma_u:[0,b]\to M$是连接$x$和$\zeta(u)$的极小测地线. 由于到割点距离函数的连续性，因此这些测地线不相交而构成单参数测地线族γ_u，且$\rho(\zeta(u))=L(\gamma_u)$. 设$U$是它们的横截正交 Jacobi 场. 显然，$U(0)=0$，$U(b)=\dot{\zeta}(0)=X$，$L''(0)$中的边界项消失，即

$$L''(0)=I(U,U). \tag{14.9}$$

同样可得

$$\widetilde{L}''(0)=I(\widetilde{U},\widetilde{U}). \tag{14.10}$$

如所知U和$\widetilde{U}$都是正交 Jacobi 场，我们还有

$$I(U,U)=\langle \dot{U}(b),U(b)\rangle,\ I(\widetilde{U},\widetilde{U})=\langle \dot{\widetilde{U}}(b),\widetilde{U}(b)\rangle. \tag{14.11}$$

又由于 γ 无共轭点,因此应用引理 14.1,得到

$$\langle \dot{U}(b),U(b)\rangle\leqslant\langle \dot{\widetilde{U}}(b),\widetilde{U}(b)\rangle. \tag{14.12}$$

这样,从(14.9)式、(14.10)式、(14.11)式和(14.12)式得到

$$\begin{aligned}\nabla^2\widetilde{\rho}(\widetilde{X},\widetilde{X})&=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\widetilde{\rho}(\zeta(u))\big|_{u=0}-(\nabla_{\dot{\zeta}(0)}\dot{\zeta})\rho\\&=\widetilde{L}''(0)=I(\widetilde{U},\widetilde{U})\\&=\langle \dot{\widetilde{U}}(b),\widetilde{U}(b)\rangle\geqslant\langle \dot{U}(b),U(b)\rangle=\nabla^2\rho(X,X).\end{aligned}$$

证迄

推论 14.7 在定理 14.6 的同样假设下,并设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$是光滑增函数(即 $f'\geqslant 0$),那么,沿测地线 γ 和 $\widetilde{\gamma}$,有

$$\nabla^2 f(\rho)\leqslant\nabla^2 f(\widetilde{\rho}). \tag{14.13}$$

证明 首先,

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(\rho)&=f''(\rho)\mathrm{d}\rho\otimes\mathrm{d}\rho+f'(\rho)\nabla^2\rho,\\\nabla^2 f(\widetilde{\rho})&=f''(\widetilde{\rho})\mathrm{d}\widetilde{\rho}\otimes\mathrm{d}\widetilde{\rho}+f'(\widetilde{\rho})\nabla^2\widetilde{\rho},\end{aligned}$$

并且,沿着 γ 以及 $\widetilde{\gamma}$,有

$$\rho(\gamma(t))=t=\widetilde{\rho}(\widetilde{\gamma}(t)).$$

因此

$$\begin{aligned}f'(\rho\circ\gamma(t))&=f'(\widetilde{\rho}\circ\widetilde{\gamma}(t)),\\f''(\rho\circ\gamma(t))&=f''(\widetilde{\rho}\circ\widetilde{\gamma}(t)),\\\mathrm{d}\rho(X)=\langle\dot{\gamma},X\rangle&=\langle\dot{\widetilde{\gamma}},\widetilde{X}\rangle=\mathrm{d}\widetilde{\rho}(\widetilde{X}).\end{aligned}$$

于是,从定理 14.6 立即得到(14.13)式.

证迄

考虑到 $\Delta=\mathrm{trace}\nabla^2$,因此有下述推论.

推论 14.8 在同样的假设下,对任何 $t\in(0,b]$,有

$$\Delta\rho(\gamma(t))\leqslant\Delta\widetilde{\rho}(\widetilde{\gamma}(t)).$$

推论 14.9 设 M 是 n 维完备单连通 Riemann 流形,$o\in M$,ρ 是从 o 出发的距离函数,如果它的截面曲率非正,那么在 $M\backslash\{o\}$ 上,有

$$\Delta\rho \geqslant \frac{n-1}{\rho}, \qquad (14.14)$$
$$\Delta\rho^2 \geqslant 2n.$$

如果截面曲率小于等于$-k^2$,那么

$$\Delta\rho \geqslant k(n-1)\coth(k\rho),$$
$$\Delta\rho^2 \geqslant 2+2(n-1)\rho\coth(k\rho).$$

证明 根据推论 14.8,我们只要计算欧氏空间和双曲空间的距离函数的 Laplacian. 在前面的 7 中我们已计算了常曲率空间的 Jacobi 场,由(7.3)式和(7.4)式给出. 对欧氏空间,任一与测地线正交的 $J(0)=0$ 的 Jacobi 场为

$$J(t)=tE(t),$$

其中 E 为平行向量场. 取

$$U(t)=\frac{1}{|J(b)|}J(t)=\frac{t}{b|E(b)|}E(t),$$

那么, $|U(b)|=1$, $\dot{U}(b)=\frac{1}{b}U(b)$, 并且

$$\nabla^2\rho(U(b),U(b))=\langle\dot{U}(b),U(b)\rangle=\frac{1}{b}=\frac{1}{\rho}.$$

在 $\gamma(b)$点取正交于测地线的正交标架 $e_2(b),\cdots,e_n(b)$,沿测地线平行移动得到 $e_\alpha(t)$, $\alpha\geqslant 2$. 那么,上述 $E(t)$分别可取为 $e_\alpha(t)$,从而得到

$$U_\alpha(t)=\frac{t}{b}e_\alpha(t), \text{且 } U_\alpha(b)=e_\alpha(b)$$

构成点 $\gamma(b)$和测地线正交的正交标架. 所以

$$\Delta\rho=\sum_\alpha\nabla^2\rho(U_\alpha(b),U_\alpha(b))=\frac{n-1}{\rho},$$
$$\Delta\rho^2=2\mathrm{d}\rho\otimes\mathrm{d}\rho\left(\frac{\partial}{\partial\rho},\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+2\rho\Delta\rho=2+2n-2=2n.$$

对双曲空间,同样取沿测地线 $\gamma(t)$平行的幺正标架场$\{\dot{\gamma}(t),e_\alpha(t)\}$,也正如(7.3)式和(7.4)式给出的,沿 $\gamma(t)$的任一正交 Jacobi 场 $J(t)$, $J(0)=0$ 一定可写成

$$J(t)=\frac{1}{k}\sinh(kt)E(t),$$

这里 $E(t)$是任一平行向量场. 取

$$U(t)=\frac{1}{|J(b)|}J(t)=\frac{\sinh(kt)}{|E(b)|\sinh(kb)}E(t),$$

那么, $|U(b)|=1$, 以及

$$\nabla^2\rho(U(b),U(b))=\langle\dot{U}(b),U(b)\rangle=k\coth(kb)=k\coth(k\rho).$$

那么,上述 $E(t)$取 $e_\alpha(t)$而使

$$U_\alpha(t)=\frac{\sinh(kt)}{\sinh(kb)}e_\alpha(t).$$

由于 $U_\alpha(b)=e_\alpha(b)$ 构成 $\gamma(b)$ 点的 $n-1$ 幺正向量, 因此

$$\Delta\rho=\sum_\alpha\nabla^2\rho(U_\alpha,U_\alpha)=k(n-1)\coth(k\rho),$$

$$\Delta\rho^2=2+2\rho\Delta\rho=2+2(n-1)k\rho\coth(k\rho).$$

证迄

有了 Hessian 比较定理,马上可得距离函数 Laplacian 之间的比较,正如推论 14.8 得到的结论. 在很多几何问题中希望将曲率条件减弱为 Ricci 曲率的条件,另一方面又增加一点条件,为此,我们专门讨论 **Laplace 比较定理**. 先证明下列引理.

引理 14.10 设 M 和 $\widetilde{M}$ 是 n 维 Riemann 流形, $\gamma:[0,b]\to M$ 及 $\tilde{\gamma}:[0,b]\to\widetilde{M}$ 分别是从 $x\in M$ 及 $\tilde{x}\in\widetilde{M}$ 出发的弧长参数的测地线, Ric 和 $\widetilde{\mathrm{Ric}}$ 分别是 Ricci 张量. 设 $\{U^i\}$, $\{\widetilde{U}^i\}$ 分别是沿 γ 以及 $\tilde{\gamma}$ 的 Jacobi 场, 满足 $U^i(0)=\widetilde{U}^i(0)=0$, 并且 $\{U^i(b),\dot{\gamma}(b)\}$ 是幺正的, $\{\widetilde{U}^i(b),\dot{\tilde{\gamma}}(b)\}$ 也是幺正的. 假定

(i) γ 和 $\tilde{\gamma}$ 都是不含割点的极小测地线;

(ii) 对任何 $t\in[0,b]$, $\widetilde{\mathrm{Ric}}(\dot{\tilde{\gamma}},\dot{\tilde{\gamma}})\leqslant\mathrm{Ric}(\dot{\gamma},\dot{\gamma})$;

(iii) $\widetilde{M}$ 是常曲率 $\tilde{\kappa}$ 的 Riemann 流形,

那么

$$\sum_i I(U^i,U^i)\leqslant\sum_i I(\widetilde{U}^i,\widetilde{U}^i).\tag{14.15}$$

证明 和引理 14.1 的证明一样,对每个 $i=2,\cdots,n$, 沿 γ 取平行移动所生成的标架场 $e^1(t)$, $e^i(t)$, 使 $e^1=\dot{\gamma}$, $e^i(b)=U^i(b)$, 同样沿 $\tilde{\gamma}$ 有 $\tilde{e}^1(t)$, $\tilde{e}^i(t)$, 使 $\tilde{e}^1(t)=\dot{\tilde{\gamma}}(t)$, $\tilde{e}^i(b)=\widetilde{U}^i(b)$. 于是

$$U^i(t)=\sum_{j=2}^{n}h_j^i e^j,$$

$$\widetilde{U}^i(t)=\sum_{j=2}^{n}\widetilde{h}_j^i\,\widetilde{e}^j.$$

显然有 $h_j^i(0)=\widetilde{h}_j^i(0)=0$, $h_j^i(b)=\widetilde{h}_j^i(b)=\delta_j^i$. 令

$$U_1^i(t)=\sum_j \widetilde{h}_j^i e_j.$$

根据命题 12.3,对任何 $i=2,\cdots,n$, 有

$$I(U^i,U^i)\leqslant I(U_1^i,U_1^i). \tag{14.16}$$

考虑到$\widetilde{M}$具有常截面曲率$\widetilde{K}$以及 $\widetilde{h}_j^i(b)=\delta_j^i$, 那么,Jacobi 场必有形式

$$\widetilde{U}^i(t)=S_{\widetilde{K}}\,\widetilde{e}^i(t),$$

其中 $S_{\widetilde{K}}$ 由(7.4)式所给出. 这说明

$$\widetilde{h}_j^i(t)=S_{\widetilde{K}}\delta_j^i.$$

从(14.16)式得到

$$\begin{aligned}
\sum_i I(U^i,U^i)\leqslant \sum_i I(U_1^i,U_1^i)&=\sum_i\int_0^b(|\dot{U}_1^i|^2-\langle R(\dot{\gamma},U_1^i)\dot{\gamma},U_1^i\rangle)\mathrm{d}t\\
&=\sum_i\int_0^b((\dot{S}_{\widetilde{K}}(t))^2-\langle R(\dot{\gamma},S_{\widetilde{K}}e^i)\dot{\gamma},S_{\widetilde{K}}e^i\rangle)\mathrm{d}t\\
&=\int_0^b((n-1)(\dot{S}_{\widetilde{K}}(t))^2-(S_{\widetilde{K}})^2\mathrm{Ric}(\dot{\gamma},\dot{\gamma}))\mathrm{d}t\\
&\leqslant\int_0^b((n-1)(\dot{S}_{\widetilde{K}}(t))^2-(S_{\widetilde{K}})^2\,\widetilde{\mathrm{Ric}}(\dot{\widetilde{\gamma}},\dot{\widetilde{\gamma}}))\mathrm{d}t\\
&=\sum_i\int_0^b(|\dot{\widetilde{U}}^i|^2-\langle\widetilde{R}(\dot{\widetilde{\gamma}},\widetilde{U}^i)\dot{\widetilde{\gamma}},\widetilde{U}^i\rangle)\mathrm{d}t=\sum_i I(\widetilde{U}^i,\widetilde{U}^i).
\end{aligned}$$

证迄

下面介绍 Laplace 比较定理(定理 14.11).

定理 14.11 设 ρ 和$\widetilde{\rho}$ 分别是从 $x\in M$ 及 $\widetilde{x}\in\widetilde{M}$ 出发的距离函数,Δ, $\widetilde{\Delta}$是 M 和$\widetilde{M}$上的 Laplace 算子. 在和引理 14.10 一样的假定下有结论:

(i) ρ 和$\widetilde{\rho}$ 在 γ 和$\widetilde{\gamma}$ 附近(除 x 和$\widetilde{x}$ 点以外)是光滑的,且

$$\Delta\rho(\gamma(t))\leqslant\Delta\widetilde{\rho}(\widetilde{\gamma}(t)); \tag{14.17}$$

(ii) $\Delta\rho(\gamma(t))=\Delta\widetilde{\rho}(\widetilde{\gamma}(t))$ 的充要条件是在 $T_{\gamma(t)}M$ 中包含$\dot{\gamma}(t)$的任何平面

的截面曲率是常数$\widetilde{\kappa}$,且沿着$\gamma(t)$在$\gamma(0)=x$为零的任何正交 Jacobi 场$J(t)$都可表示成$J(t)=S_{\widetilde{\kappa}}(t)E(t)$,其中$S_{\widetilde{\kappa}}:[0,b]\to\mathbb{R}$是古典 Jacobi 方程$f''+\widetilde{\kappa}f=0$,$f(0)=0$的解,$E(t)$是与$\dot{\gamma}$正交的单位平行向量场.

证明

(i) 与 Hessian 比较定理一样证明,设$\{e^1, \cdots, e^n\}$是$T_{\gamma(t)}M$上的单位正交基,且$e^1=\dot{\gamma}$,那么

$$\Delta\rho(\gamma(t))=\sum_{i=2}^{n}\nabla^2\rho(e^i, e^i)=\sum_{i=2}^{n}I(U^i, U^i),$$

其中U^i是正交 Jacobi 场,意义同定理 14.6 及引理 14.10.同样

$$\widetilde{\Delta}\,\widetilde{\rho}(\widetilde{\gamma}(t))=\sum_{i=2}^{n}I(\widetilde{U}^i, \widetilde{U}^i).$$

应用引理 14.10 立即得到(14.17)式.

(ii) 如果$\Delta\rho(\gamma(t))=\Delta\,\widetilde{\rho}(\widetilde{\gamma}(t))$,那么在(i)的证明过程中不等号都变成等号,在引理 14.10 的证明中的不等式(14.16)也为等式,即对任何$i=2, \cdots, n$,有

$$I(U^i, U^i)=I(U_1^i, U_1^i).$$

根据 Jacobi 场的性质(命题 12.3),$U^i=U_1^i$. 又由常曲率空间中 Jacobi 场的性质$\widetilde{U}^i=S_{\widetilde{\kappa}}\widetilde{e}^i$,$S_{\widetilde{\kappa}}$满足

$$f''+\widetilde{\kappa}f=0,\ f(0)=0,\ f(b)=1.$$

根据U_1^i的构造$U_1^i=S_{\widetilde{\kappa}}e^i$,因此,$U^i=S_{\widetilde{\kappa}}e^i$是沿$\gamma$的 Jacobi 场. 将$U^i$代入Jacobi 方程

$$\ddot{U}^i+R(\dot{\gamma}, U^i)\,\dot{\gamma}=0,$$

从而

$$(S''_{\widetilde{\kappa}}+\langle R(\dot{\gamma}, U^i)\,\dot{\gamma}, e^i\rangle)e^i=0,$$

$$\langle R(\dot{\gamma}, e^i)\,\dot{\gamma}, e^i\rangle=-\frac{S''_{\widetilde{\kappa}}}{S_{\widetilde{\kappa}}}=\widetilde{\kappa},$$

其中e^i可以为任一与$\dot{\gamma}$正交的单位向量.

证迄

推论 14.12 **假设同上并且设$f:[0,b]\to\mathbb{R}$是光滑增函数(即$f'\geqslant 0$),那么,对任何$t\in[0,b]$,必有**

$$\Delta f(\rho)(\gamma(t)) \leqslant \widetilde{\Delta} f(\widetilde{\rho})(\widetilde{\gamma}(t)).$$

证明 注意到

$$\Delta f(\rho) = f''(\rho) + f'(\rho)\Delta\rho \quad 和 \quad \widetilde{\Delta} f(\widetilde{\rho}) = f''(\widetilde{\rho}) + f'(\widetilde{\rho})\widetilde{\Delta}\widetilde{\rho}$$

即得.

证讫

下面研究**三角形(Topogonov)比较定理**. 这是 Rauch 比较定理的整体形式. 它提供了研究曲率有下界的 Riemann 流形的结构的重要工具.

定义 14.13 (i) Riemann 流形 M 中的测地三角形$\triangle(p_1p_2p_3)$是 3 个不同的点 p_1, p_2, p_3,称为顶点,和连接 p_{i+1} 到 p_{i+2}($i=1, 2, 3 \bmod 3$) 称为边的 3 条极小测地线 γ_i 所构成的图形. γ_{i-1} 和 γ_{i+1}^{-1} 在 p_i 切向量间的夹角称为三角形$\triangle(p_1p_2p_3)$在 p_i 的角,记为 $\alpha_i = \angle(p_{i-1}p_ip_{i+1})$ 或 $\angle p_i$. 周长 $l = l_1 + l_2 + l_3$,其中 $l_i = L(\gamma_i)$.

在测地三角形$\triangle(p_1p_2p_3)$的定义中,如果两条边 γ_2, γ_3 是极小测地线,而 γ_1 是测地线段(不一定极小),它的长度满足不等式

$$l_1 \leqslant l_2 + l_3 = d(p_1, p_3) + d(p_1, p_2),$$

那么,我们称这样的图形是广义测地三角形.

(ii) 在 M 中的测地链$(p; \gamma, \tau)$由称为顶点的一个点 $p \in M$ 以及从点 p 出发的称为边的极小测地线段 γ, τ 所构成的图形. 我们以$\angle\alpha$ 记 γ 和 τ 在 p 的切向量的夹角.

如果 γ 是极小的而 τ 不一定是极小,我们称$(p; \gamma, \tau)$为广义测地链.

定理 14.14(三角形(Toponogov)比较定理[26]) 设 M 是完备的 Riemann 流形,它的截面曲率满足 $K_\sigma \geqslant \kappa$, 其中 κ 是常数. 记 M_κ^2 是 2 维的单连通的具常截面曲率 κ 的 Riemann 流形.

(i) (T. C. T. (Ⅰ))对广义测地三角形$\triangle(p_1p_2p_3)$,假定 γ_2, γ_3 是极小的并且 $l_1 = L(\gamma_1) \leqslant \dfrac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$,那么,周长 $l \leqslant \dfrac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$, 并且,在 M_κ^2 中存在一个测地三角形$\triangle(\widetilde{p}_1\widetilde{p}_2\widetilde{p}_3)$,具有相同的边长 $L(\widetilde{\gamma}_i) = L(\gamma_i)$($i = 1, 2, 3$), 并满足 $\angle\alpha_2 \geqslant \angle\widetilde{\alpha}_2$, $\angle\alpha_3 \geqslant \angle\widetilde{\alpha}_3$.

如果 $l < \dfrac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$, 那么,上述$\triangle(\widetilde{p}_1\widetilde{p}_2\widetilde{p}_3)$在相差一个 M_κ^2 中的等距下是唯一的. 进而,如果在 M 中存在周长为 $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$($\kappa > 0$) 的测地三角形$\triangle(p_1p_2p_3)$, 那么,

M 等距于常截面曲率 κ 的球面 S_κ^m.

(ii) (T.C.T.(Ⅱ))对广义测地链$(p;\ \gamma,\ \tau)$,假定 $L(\tau) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. 设$(\tilde{p};\ \tilde{\gamma},\ \tilde{\tau})$是 M_κ^2 中的测地链,满足 $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$, $L(\tau) = L(\tilde{\tau})$, 并且,它的角$\tilde{\alpha}$等于$(p;\ \gamma,\ \tau)$的角. 设 q, $\tilde{q}$ 表示 γ, $\tilde{\gamma}$的端点,r, $\tilde{r}$ 表示 τ, $\tilde{\tau}$的端点. 那么,

$$d(q,\ r) \leqslant d(\tilde{q},\ \tilde{r}).$$

附注 T.C.T.(Ⅰ)和 T.C.T.(Ⅱ)是等价的.

如果 T.C.T.(Ⅰ)成立并设$(p;\ \gamma,\ \tau)$是一广义测地链. 令曲线 τ 的长度为 $l:= L(\tau)\left(\leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\right)$, 取 t 为它的弧长参数,那么, $0 \leqslant t \leqslant l$. 令

$$T:= \sup\{t_0 \in (0,\ l];\ \text{T.C.T.(Ⅱ) 对 } 0 < t \leqslant t_0\}.$$

那么, $d(q,\ \tau(T)) \leqslant d(\tilde{q},\ \tilde{\tau}(T))$. 事实上,根据连续性以及 T 的定义,必有

$$d(q,\ \tau(T)) = d(\tilde{q},\ \tilde{\tau}(T)).$$

为证明 T.C.T.(Ⅱ),只要证明 $T = l$. 首先说明, $T > 0$. 对使 $\tau|_{[0,\ t']}$是极小的 $t' > 0$, 我们考虑 M 中的测地三角形$\triangle(pq\tau(t'))$以及 M_κ^2 中具相同边长的$\triangle(\tilde{p}\tilde{q}\tilde{s})$. 那么,根据 T.C.T.(Ⅰ),我们有

$$\angle(\tilde{q}\tilde{p}\tilde{s}) \leqslant \angle(qp\tau(t')).$$

考察 M_κ^2 中的两个三角形$\triangle(\tilde{p}\tilde{q}\tilde{s})$和$\triangle(\tilde{p}\tilde{q}\tilde{\tau}(t'))$,有

$$\angle(\tilde{q}\tilde{p}\tilde{s}) \leqslant \angle(qp\tau(t')) = \angle(\tilde{q}\tilde{p}\tilde{\tau}(t')),$$

由于在空间形式的模型空间中有相应的余弦定律,据此可知在对应的测地三角形中,当两边对应相等时,夹角大的对边长,反之亦然. 我们由此得到

$$d(\tilde{q},\ \tilde{\tau}(t)) \geqslant d(\tilde{q},\ \tilde{s}) = d(q,\ \tau(t')),$$

从而 $T > 0$. 其次,假定 $T < l$. 对 M 中的测地三角形$\triangle(pq\tau(T))$以及 M_κ^2 中的$\triangle(\tilde{p}\tilde{q}\tilde{\tau}(T))$,从 T.C.T.(Ⅰ)得到 $\angle(\tilde{q}\ \tilde{\tau}(T)\ \tilde{p}) \leqslant \angle(q\tau(T)p)$. 所以,对充分小的 $\varepsilon > 0$ 以及 $\triangle(q\tau(T)\tau(T+\varepsilon))$, 取 M_κ^2 中的具有相同边长的测地三角形$\triangle(\tilde{q}\ \tilde{\tau}(T)\ \tilde{s}')$, 我们有 $\angle(\tilde{q}\ \tilde{\tau}(T)\ \tilde{s}') \leqslant \angle(q\tau(T)\tau(T+\varepsilon)) = \pi - \angle q\tau(T)p) \leqslant \pi - \angle(\tilde{q}\tilde{\tau}(T)\ \tilde{p}) = (\tilde{q}\ \tilde{\tau}(T)\ \tilde{\tau}(T+\varepsilon))$. 因此, $d(\tilde{q},\ \tilde{\tau}(T+\varepsilon)) \geqslant d(\tilde{q},\ \tilde{s}') = d(q,\ \tau(T+\varepsilon))$, 这和 T 的定义相矛盾. 所以, $T = l$.

反之,假定 T.C.T(Ⅱ)成立并且设$\triangle(p_1p_2p_3)$是广义测地三角形.

如果它的周长小于$\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$,那么,在 M_κ^2 中的测地三角形$\triangle(\tilde{p}_1\tilde{p}_2\tilde{p}_3)$是唯一确

定的(可能差一个等距). 考察广义测地链$(p_2;\gamma_3,\gamma_1)$,顶角记为$\angle\alpha_2$,以及M_κ^2上对应的测地链$(\tilde{p}_2;\tilde{\gamma}_3,\tilde{\gamma}'_2)$,顶角记为$\angle\tilde{\alpha}_2$. 从 T. C. T. (Ⅱ)得到

$$d(\tilde{p}_1,\tilde{q})\geqslant d(p_1,p_3)=L(\gamma_2)=L(\tilde{\gamma}_2).$$

在M_κ^2中有$\triangle(\tilde{p}_1\tilde{p}_2\tilde{q})$以及$\triangle(\tilde{p}_1\tilde{p}_2\tilde{p}_3)$. 由于$L(\tilde{p}_2\tilde{q})=L(\tilde{p}_2\tilde{p}_3)$以及$d(\tilde{p},\tilde{q})\geqslant d(\tilde{p}_1,\tilde{p}_3)$,因此

$$\angle\alpha_2=\angle(\tilde{p}_1\tilde{p}_2\tilde{q})\geqslant\angle\tilde{\alpha}_2.$$

类似地,有

$$\angle\alpha_3\geqslant\angle\tilde{\alpha}_3.$$

如果周长$l=\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$并且$l_i<\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}(i=1,2,3)$,我们同样得到$\angle\alpha_2\geqslant\angle\tilde{\alpha}_2$,$\angle\alpha_3\geqslant\angle\tilde{\alpha}_3$. 但此时,$M_\kappa^2$中的比较三角形位于一个大圆上,因此,$\angle\tilde{\alpha}_2=\angle\tilde{\alpha}_3=\pi$. 从而,$\angle\alpha_2=\angle\alpha_3=\pi$. 如果$l_2$或$l_3$等于$\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$,那么,根据最大直径定理(请见下面的15),$M$和$S_\kappa^m$等距,我们的结论显然成立. 如果$l=\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$并且$l_3=\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$,那么,在$M_\kappa^2$中的对应测地三角形是一个(连接对径两点的测地线组成的)双角. 这不是唯一确定的,但是,我们可在M_κ^2中取一个双角使关于角的条件成立.

最后,在定理的证明中将说明$l>\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$情形不会发生.

为证明定理 14. 14 先证明下列引理(H. Karcher).

引理 14. 15 设$(p;\gamma,\tau)$是测地链,其中$\gamma,\tau:[0,1]\to M$是极小测地线. 令$p=\gamma(0)=\tau(0)$, $q=\gamma(1)$, $r=\tau(1)$且考虑测地三角形$\triangle(pqr)$. 设l是周长,假定$4\varepsilon:=\frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}-l>0$. 如果在包含$\overline{B}_{\frac{l}{2}}(p)$的紧致区域上截面曲率$K\leqslant\Delta(\Delta>0)$. 取在$M_\kappa^m$中如 T. C. T(Ⅱ)的对应的测地链$(\tilde{p},\tilde{\gamma},\tilde{\tau})$,且令$\tilde{q}=\tilde{\gamma}(1)$, $\tilde{r}=\tilde{\tau}(1)$,那么,存在$c(\varepsilon,\delta,\Delta)>0$,当$d(p,r)<c(\varepsilon,\delta,\Delta)$时,$d(q,r)\leqslant d(\tilde{q},\tilde{r})$,即在此情形下,T. C. T. (Ⅱ)成立. 进而,如果,$\kappa\leqslant 0$,我们可取$c=\frac{\pi}{2\sqrt{\Delta}}$.

证明 设$\tilde{E}(t)$是单位向量$\dot{\tilde{\tau}}(0)/\|\dot{\tilde{\tau}}(0)\|$在$M_\kappa^m$中沿$\tilde{\gamma}$的平行移动所生

成. 我们考虑连接$\tilde{r}$和$\tilde{q}$的一条极小测地线$\tilde{c}:[0,1]\to M^m_\kappa$,它不一定取与弧长成比例的量为参数,但可表示为$\tilde{c}(t)=\exp_{\tilde{\gamma}(t)}f(t)\widetilde{E}(t)$, 其中$f$是$[0,1)$上的光滑函数并且$0\leqslant f(t)<\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. 如果$\kappa\leqslant 0$, 根据平面公理,这显然是可能的,并且,我们看到在$\kappa>0$时,取$c(\varepsilon,\kappa,\Delta)\leqslant\varepsilon$时也是可能的. 事实上,因为

$$d(\tilde{p},\tilde{q})=d(p,q)\leqslant\frac{l}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}-\varepsilon,$$

并且

$$d(\tilde{q},\tilde{r})\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}-\varepsilon,\ d(\tilde{p},\tilde{r})<\varepsilon,$$

所以,三角形$\triangle(\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r})$的周长小于$\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}-2\varepsilon$, 并且测地三角形$\triangle(\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r})$的所有角小于$\pi$. 那么,根据平面公理$\tilde{c}$可表示成上述形式且$0\leqslant f(t)<\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$是$0\leqslant t<1$上的光滑函数.

另一方面,我们在M中取沿τ平行的向量场$E(t)$且

$$E(0)=\dot{\tau}(0)/\ \|\ \dot{\tau}(0)\|,$$

并注意到$\langle E(t),\dot{\gamma}(t)\rangle\equiv\langle\widetilde{E}(t),\dot{\tilde{\tau}}(t)\rangle$. 我们考虑$M$中的曲线$c$定义为

$$c(t):=\exp_{\gamma(t)}f(t)E(t),$$

它连接r和q. 现在,假定$0\leqslant f(t)\leqslant\frac{\pi}{2\sqrt{\Delta}}$, 那么,根据定理 Rauch 比较定理中关于焦点的假定是满足的,我们就有

$$d(\tilde{q},\tilde{r})=L(\tilde{c})\geqslant L(c)\geqslant d(q,r).$$

这说明 T. C. T. 在这种情形成立. 所以,只要估计$f(t)$.

我们只证明$\kappa>0$的情形,而将$\kappa\leqslant 0$的情形的证明留给读者练习. 注意到$\widetilde{E}(t)$和$\dot{\tilde{\gamma}}$的夹角α是常数. 令顶点$\tilde{q}$处$\tilde{\gamma}$和$\tilde{c}$的夹角为β且令$a(t):=d(\tilde{q},\tilde{c}(t))$, 那么,根据正弦定理,我们有

$$\sin\sqrt{\kappa}f(t)=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\sin\sqrt{\kappa}a(t).\tag{14.18}$$

我们将说明如果取c充分小,$f(t)$就小于或等于$\frac{\pi}{2\sqrt{\Delta}}$. 首先,假定$d(\tilde{q},\tilde{r})\leqslant$

$\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$. 在这种情形,从(14.18)式以及正弦定理我们有

$$\sin\sqrt{\kappa}f(t)=\frac{\sin\sqrt{\kappa}a(t)}{\sin\sqrt{\kappa}d(\tilde{q},\tilde{r})}\sin\sqrt{\kappa}d(\tilde{p},\tilde{r})\leqslant\sin\sqrt{\kappa}d(\tilde{p},\tilde{r})<\sin\sqrt{\kappa}c(\varepsilon,\delta,\Delta).$$

注意到 $f(1)=0$ 以及当 t 接近于 1 时 $f(t)<\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$,因而,如果取 c 充分小,我们有 $f(t)<\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$. 其次,假定 $\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}<d(\tilde{q},\tilde{r})\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}-\varepsilon$. 在这种情况下,微分(14.18)式的两端,我们有 $a(t_0)=\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$,这里 $t=t_0<1$ 是 $f(t)$ 取极大的点. 又从正弦定理得到

$$\sin\sqrt{\kappa}f(t_0)=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\sin\sqrt{\kappa}d(\tilde{p},\tilde{r})}{\sin\sqrt{\kappa}d(\tilde{q},\tilde{r})}\leqslant\frac{\sin\sqrt{\kappa}c(\varepsilon,\kappa,\Delta)}{\sin\sqrt{\kappa}\varepsilon}.$$

如果我们取 c 充分小,使上式最后一项小于 $\sin\left(\sqrt{\kappa}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}\right)$, 我们就得到 $f(t_0)\leqslant\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$.

定理 14.14 的证明 如果 $\kappa>0$ 并且 $d(M)=\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, 那么,由最大直径定理,$M$ 和半径为 κ 的球面等距,此时,结论显然成立. 以后,当 $\kappa>0$ 时我们假定 $d(M)<\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. 设 $\triangle(p_1p_2p_3)$ 是 M 中的广义测地三角形,l 是它的周长. 我们用下面 3 步来证明 T. C. T. (Ⅰ).

(1) $\kappa\leqslant0$ 或 $\kappa>0$ 且 $l<\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ 的情形.

令 $4\varepsilon:=\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}-l$,当 $\kappa\leqslant0$ 时,将它看为 $+\infty$,还假定在紧子集 $C=\overline{B}_{\frac{l}{2}}(q)$ 截面曲率处处满足 $K\leqslant\Delta$. 设 $c=c(\varepsilon,\kappa,\Delta)$ 是上面引理中给出的正数. 取[0, 1]的分割 $0=t_0<t_1\cdots<t_k=1$,使对 $\gamma_1:[0,1]\to M$ 有 $d(r_i,r_{i+1})\leqslant c(i=0,\cdots,k-1)$,其中 $r_i=\gamma_1(t_i)$, $r_0=p_2$, $r_k=p-3$.

对 $i=1,\cdots,k$,取连接 r_i 和 p_1 的极小测地线 δ_i,我们用关于 i 的归纳法证明对广义测地三角形 $\triangle(p_1p_2r_i)$ 的 T. C. T. (Ⅰ)成立. 注意到 $\triangle(p_1p_2r_i)$ 包含在 C 中并且由三角不等式,周长 $l_{(i)}$ 满足 $l_{(i)}\leqslant l$. 容易验证

$$d(p_1, p_2)+d(p_1, r_i)\leqslant L(\gamma_1 \mid [0, t_i]).$$

对 $i=1$，考察 M_κ^2 中的测地三角形 $\triangle(\tilde{p}_1\tilde{p}_2\tilde{r}_i)$，它的 3 条边长等于 $\triangle(p_1p_2r_i)$ 的 3 条边长. 将上面引理应用于测地链 $(p_2;\gamma_3^{-1}, \gamma_1|[0, t_1])$ 以及 $(\gamma_1;\delta_1, (\gamma|[0, t_1])^{-1})$，由它们和 M_κ^2 中对应的测地链以及 $\triangle(\tilde{p}_1\tilde{p}_2\tilde{r}_i)$，我们得到

$$\angle(p_1p_2r_1)\geqslant\angle(\tilde{p}_1\tilde{p}_2\tilde{r}_1),\qquad \angle(p_1r_1p_2)\geqslant\angle(\tilde{p}_1\tilde{r}_1\tilde{p}_2),$$

这就完成了 $i=1$ 时的证明.

假定 $i-1$ 时定理成立. 我们考察 M_κ^2 中的测地三角形 $\triangle(\tilde{p}_1\tilde{p}_2\tilde{r}_{i-1})$，$\triangle(\tilde{p}_1\tilde{r}_{i-1}\tilde{r}_i)$，它们的边长和 $\triangle(p_1p_2r_{i-1})$ 以及 $\triangle(p_1r_{i-1}r_i)$ 的边长对应相等. 那么，根据归纳法假设，我们和证明 $i=1$ 时的推导一样得到

$$\begin{aligned}&\angle(p_1p_2r_{i-1})\geqslant\angle(\tilde{p}_1\tilde{p}_2\tilde{r}_{i-1}),\ \angle(p_1r_{i-1}p_2)\geqslant\angle(\tilde{p}_1\tilde{r}_{i-1}\tilde{p}_2),\\&\angle(p_1r_{i-1}p_2)\geqslant\angle(\tilde{p}_1\tilde{r}_{i-1}\tilde{p}_2),\ \angle(p_1r_ir_{i-1})\geqslant\angle(\tilde{p}_1\tilde{r}_i\tilde{r}_{i-1}).\end{aligned}\tag{14.19}$$

这样，我们得到 M_κ^2 中的四边形，它是凸的. 事实上，它在顶点 $\tilde{r}_{i-1}$ 是凸的(即 $\angle(\tilde{p}_2\tilde{r}_{i-1}\tilde{r}_i)\leqslant\pi$)，因为根据(14.19)式，有

$$\begin{aligned}\angle(\tilde{p}_2\tilde{r}_{i-1}\tilde{r}_i)&=\angle(\tilde{p}_1\tilde{r}_{i-1}\tilde{p}_2)+\angle(\tilde{p}_1\tilde{r}_{i-1}\tilde{r}_i)\\&\leqslant\angle(p_1r_{i-1}p_2)+\angle(p_1r_{i-1}r_i)=\pi.\end{aligned}$$

根据三角不等式，有

$$d(\tilde{p}_2, \tilde{r}_{i-1})+d(\tilde{r}_{i-1}, r_i)\leqslant d(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)+d(\tilde{p}_1, \tilde{r}_i),$$

所以，它在 $\tilde{p}_1$ 是凸的. 将边 $\tilde{p}_2\tilde{r}_{i-1}$ 延伸到测地线 $\tilde{\gamma}_1$，令 $\tilde{r}_i'$ 是 $\tilde{r}_i$ 上从 $\tilde{r}_{i-1}$ 延伸长度 $d(\tilde{r}_{i-1}, \tilde{r}_i)$ 得到的点，那么，在 M_κ^2 上，我们得到 $d(\tilde{p}_1, \tilde{r}_i)\leqslant d(\tilde{p}_1, \tilde{r}_i')$. 再在 M_κ^2 上将三角形 $\triangle(\tilde{p}_1\tilde{p}_2\tilde{r}_i')$ 与测地三角形 $\triangle(\tilde{p}_1\tilde{p}_2\tilde{r}_i'')$ 相比较，它与 $\triangle(p_1p_2r_i)$ 有相同的边长，我们得到

$$\angle(p_1p_2r_i)=\angle(p_1p_2r_{i-1})\geqslant\angle(\tilde{p}_1\tilde{p}_2\tilde{r}_{i-1})=\angle(\tilde{p}_1\tilde{p}_2\tilde{r}_i')\geqslant\angle(\tilde{p}_1\tilde{p}_2\tilde{r}_i'').$$

将上述两个测地三角形的作用变动一下，我们也得到

$$\angle(p_1r_ip_2)\geqslant\angle(\tilde{p}_1\tilde{r}_i''\tilde{p}_2).$$

这就证明了对 i 时的结论.

(2) $\kappa>0$ 且 $l=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ 的情形.

我们已假定 $d(M)<\dfrac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$，$d(p_1, p_2)$，$d(p_1, p_3)<\dfrac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. 现在，由于 $l=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$

在 γ_1 上有一点 $r=\gamma_1(t_1)$，使

$$d(p_1,\ p_2)+L(\gamma_1\mid_{[0,\ t_1]})=L(\gamma_1\mid_{[t_1,\ 1]})+d(p_1,\ p_3)=\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

我们还假定 $d(p_1,\ r)<\frac{\pi}{\kappa}$，因此，如上述第一步，我们容易验证

$$d(p_1,\ p_2)+d(p_1,\ r)\geqslant L(\gamma_1\mid_{[0,\ t_1]}),$$

并且

$$d(p_1,\ r)+d(p_3,\ p_1)\geqslant L(\gamma_1\mid_{[t_1,\ 1]}).$$

然后取 M_κ^2 中的测地三角形$\triangle(\tilde{p}_1\ \tilde{p}_2\ \tilde{r})$以及$\triangle(\tilde{p}_1\ \tilde{r}\ \tilde{p}_3)$它们的对应边分别等于 M 中的广义测地三角形$\triangle(p_1p_2r)$，$\triangle(p_1rp_3)$. 我们后面将证明 $\angle(\tilde{p}_1\tilde{r}\ \tilde{p}_2)+\angle(\tilde{p}_1\tilde{r}\tilde{p}_3)=\pi$，从而

$$\angle(\tilde{p}_1\tilde{r}\ \tilde{p}_2)=\angle(p_1rp_2),\ \angle(\tilde{p}_1\tilde{r}\ \tilde{p}_3)=\angle(p_1rp_3).$$

否则，延长连接$\tilde{p}_2\tilde{r}$的极小测地线，超过$\tilde{r}$，到$\tilde{p}'_3$，使 $d(\tilde{p}'_3,\ \tilde{r})=d(\tilde{p}_3,\ \tilde{r})$. 由于 $\angle(\tilde{p}_1\tilde{r}\ \tilde{p}_3)<\angle(\tilde{p}_1\tilde{r}\ \tilde{p}'_3)$，因此有 $d(\tilde{p}_1,\ \tilde{p}'_3)>d(\tilde{p}_1,\ \tilde{p}_3)$. 这样，在 M_κ^2 中得到测地三角形$\triangle(\tilde{p}_1\tilde{p}_2\tilde{p}'_3)$它的周长超过$\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$，得到矛盾. 所以，我们在 M_κ^2 上得到测地三角形$\triangle(\tilde{p}_1\tilde{p}_2\tilde{p}_3)$，它和$\triangle(p_1p_2p_3)$的边长对应相等，并有 $\angle\tilde{p}_2\leqslant\angle p_2$，$\angle\tilde{p}_3\leqslant\angle p_3$. 根据球面三角中的余弦定理，如果 $L(\gamma_1)=d(\tilde{p}_2,\ \tilde{p}_3)<\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$，那么，测地三角形$\triangle(\tilde{p}_1\ \tilde{p}_2\ \tilde{p}_3)$满足 $\angle\tilde{p}_i=\pi(i=2,\ 3)$，它事实上是大圆. 注意到，此时对三角形$\triangle(p_1p_2p_3)$也有 $\angle p_2=\angle p_3=\pi$. 如果 $L(\gamma_1)=\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$，用类似的讨论，我们看到$\triangle(\tilde{p}_1\tilde{p}_2\tilde{p}_3)$满足 $\angle\tilde{p}_1=\pi$，它是由连接$\tilde{p}_2$和$\tilde{p}_3$的两个半大圆组成的双角. 并且，如果 $L(\gamma_1)<\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$，则上面的讨论蕴涵着 $d(p_1,\ r)=d(\tilde{p}_1,\ \tilde{r})=\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. 所以，如果在 M 中存在一个周长为$\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$的测地三角形，那么，我们有 $d(M)=\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$，$M$ 就和常曲率 κ 的球面等距.

(3) $\kappa>0$ 且 $l>\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ 的情形.

我们来证明这种情形不会发生. 令 $r=\gamma_1(t_1)$ 是 γ_1 上满足

$$d(p_1, p_2)+d(p_1, r)+L(\gamma_1|_{[0,t_1]})=\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$$

的第 1 个点. 我们和前面一样假定 $d(p_1, p_2), d(p_1, r)<\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$.

另一方面,由于周长 $l>\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$, 我们有

$$L(\gamma_1|_{[0,t_1]})<L(\gamma_1)\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

应用第二步讨论于广义测地三角形$\triangle(p_1p_2r)$,我们有 $\angle p_2=\angle r=\pi$, 且 p_3 位于连接 r 到 p_1 的极小测地线上. 这样

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}<d(p_1, p_2)+L(\gamma_1)+d(p_1, p_3),$$

$$d(p_1, p_2)+L(\gamma_1|_{[0,t_1]})+d(r, p_1)=\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}},$$

这是不可能的.

证迄

15 体积和体积比较定理

我们已知道定向流形上微分形式的积分以及 Stokes 公式. 对 Riemann 流形,它的 Riemann 度量自然决定了它的**体积形式**,从而,可定义 Riemann 流形中区域的**体积**. 这里主要证明 **Bishop-Gromov 体积比较定理**,并用它来证明**最大直径定理**. Bishop-Gromov 体积比较定理是在 Ricci 曲率有下界的情形下得到的,据此,可以得到体积的上界估计. 当然从截面曲率的上界条件,可以得到体积的下界估计. 这里的曲率条件一般不能减弱为 Ricci 曲率的条件. 这里也给出了后者在附加条件下的结果.

设$\{e_i\}$是 Riemann 流形 M 中一点附近的局部幺正标架场,$\{\omega^i\}$是它的对偶标架场,那么,M 上的体积形式可表示为

$$\mathrm{d}V = \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n.$$

在局部坐标系$\{x^1, \cdots, x^n\}$下,Riemann 度量为

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j.$$

如果

$$\omega^i = a^i_j \mathrm{d}x^j,$$

那么

$$g_{ij} = \sum_k a^k_i a^k_j,\ g = \det(g_{ij}) = [\det(a^j_i)]^2,$$

$$\mathrm{d}V = \sqrt{g}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n.$$

设$\mathcal{U} \subset M$是任一坐标邻域,那么,在$\mathcal{U}$中的积分定义为

$$\int_{\mathcal{U}} f\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{U}} f\sqrt{g}\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n.$$

直接计算可以验证,上式不依赖于局部坐标的选取. 设$\{\mathcal{U}_i\}$是 Riemann 流形 M 上的一个局部有限的坐标邻域覆盖. 利用附属于$\{\mathcal{U}_i\}$的单位分解$\{\phi_i\}$ ($\phi_i \geqslant 0$, $\sum \phi_i = 1$), 定义

$$\int_M f\mathrm{d}V = \sum_i \int_{\mathcal{U}_i} (\phi_i f)\mathrm{d}V.$$

由于上式右端和覆盖$\{\mathcal{U}_i\}$以及单位分解的选取都无关,因此定义是有意义的.

考虑到 Riemann 流形一定是割迹内部 Σ_x 和割迹的 $\mathbb{C}(x)$ 的并 $M = \Sigma_x \cup \mathbb{C}(x)$, 而$\mathbb{C}(x)$是零测度集. 因此

$$\int_M f\mathrm{d}V = \int_{M\setminus\mathbb{C}(x)} f\mathrm{d}V = \int_{\Sigma_x} f\mathrm{d}V.$$

流形 M 也许不能被一个坐标邻域所覆盖,但是,它的积分值只依赖于一个坐标邻域 Σ_x,从而积分定义和定向无关.

现在,我们来证明著名的 **Biship-Gromov 体积比较定理**.

对 Riemann 流形 M 上的任何光滑函数 $f:M\to\mathbb{R}$,有

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{g}g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right), \tag{15.1}$$

其中 $g = \det(g_{ij})$.

对任何 $x\in M$, $\Sigma(x)$是 T_xM 中切割迹的内部,由于 $\exp_x:\Sigma(x)\to\Sigma_x$ 是微分同胚,$\Sigma(x)$中的极坐标系导致 Σ_x 中的测地极坐标系,又根据 Gauss 引理,将 Riemann度量写成

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + g_{\alpha\beta}(r,\theta)\mathrm{d}\theta^\alpha\mathrm{d}\theta^\beta, \tag{15.2}$$

其中, $\alpha,\beta = 1,\cdots,n-1$, 曲线 r 为从点 x 出发的测地线,在割迹内部 Σ_x, r 也是从点 x 出发的距离函数,θ^α是 T_xM 中单位球面上的局部坐标. 记 $g = \det(g_{\alpha\beta})$. 从(15.1)式和(15.2)式得到

$$\Delta r = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial r},$$

也就是

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial r} = \sqrt{g}\Delta r. \tag{15.3}$$

沿从 x 出发的测地线曲线 r,取平行移动标架场$\left\{\frac{\partial}{\partial r}, e_\alpha\right\}$,由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\Delta r &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\left\langle\nabla_{e_\alpha}\frac{\partial}{\partial r}, e_\alpha\right\rangle\\ &= \left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\nabla_{e_\alpha}\frac{\partial}{\partial r}, e_\alpha\right\rangle\end{aligned}$$

$$= -\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial r}, e_\alpha\right)\frac{\partial}{\partial r}, e_\alpha\right\rangle + \left\langle \nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial r}, e_\alpha\right]}\frac{\partial}{\partial r}, e_\alpha\right\rangle,$$

因此我们得到

$$\frac{\partial}{\partial r}\Delta r = -\operatorname{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) - |\operatorname{Hess}(r)|^2. \tag{15.4}$$

根据 Schwarcz 不等式,有

$\Delta r \leqslant \sqrt{n-1}\,|\operatorname{Hess}(r)|$ （从后面讨论可知对常截面曲率流形为等号),

并将其代入(15.4)式得到

$$\frac{\partial}{\partial r}\Delta r \leqslant -\operatorname{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{n-1}(\Delta r)^2. \tag{15.5}$$

将(15.3)式微分,并将(15.3)式和(15.5)式代入得到

$$\frac{\partial^2\sqrt{g}}{(\partial r)^2} \leqslant \frac{n-2}{(n-1)\sqrt{g}}\left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial r}\right)^2 - \sqrt{g}\operatorname{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right). \tag{15.6}$$

如所知

$$\sqrt{g}\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$$

是从点 x 出发测地线在割点之内的体积形式,其中 $\mathrm{d}\theta$ 是 $n-1$ 维单位球面的体积形式. 为记号简单起见,记

$$J(r, \theta) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g},$$

那么,割迹内部的体积为

$$V(\Sigma_x) = \int_{\Sigma(x)} J(r, \theta)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

其中,$\Sigma(x)$为切割迹内部. 一般地,对 M 中以 x 为中心、以 t 为半径的测地球 $B_x(t)$,它的体积为

$$V(x, t) = \int_{B(t)\cap\Sigma(x)} J(r, \theta)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

其中,$B(t)$表示 T_xM 中以 0 为中心、以 t 为半径的开球. 类似地,可定义Riemann流形中区域的体积. 根据法坐标的性质,当 $r \to 0$ 时,有

$$J(r, \theta) \sim r^{n-1}.$$

对常截面曲率 κ 的空间型式 M_κ，在测地极坐标下的度量为

$$ds^2 = dr^2 + S_\kappa^2(r)d\theta^2,$$

其中

$$S_\kappa(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\kappa}}\sin(\sqrt{\kappa}r), & \kappa > 0; \\ r, & \kappa = 0; \\ \dfrac{1}{\sqrt{-\kappa}}\sinh(\sqrt{-\kappa}r), & \kappa < 0. \end{cases} \tag{15.7}$$

这时

$$\mathrm{Hess}(r) = \frac{S_\kappa'}{S_\kappa}(g - dr \otimes dr). \tag{15.8}$$

M_κ 的体积形式为

$$J_\kappa dr \wedge d\theta,$$

其中 $J_\kappa = S_\kappa^{n-1}(r)$. 从(15.3)式、(15.4)式和(15.8)式可直接验证：

$$\frac{\partial}{\partial r}\Delta r_\kappa = -(n-1)\kappa - \frac{1}{n-1}(\Delta r_\kappa)^2, \tag{15.9}$$

$$\frac{\partial^2 J_\kappa}{\partial r^2} = \frac{n-2}{(n-1)J_\kappa}\left(\frac{\partial J_\kappa}{\partial r}\right)^2 - (n-1)\kappa J_\kappa. \tag{15.10}$$

现在设 M 是完备的 Riemann 流形，并且 $\mathrm{Ric} \geqslant (n-1)\kappa$. 令

$$\mathrm{D} = J^{\frac{1}{n-1}} J_\kappa^{-\frac{1}{n-1}}, \text{记} \quad \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial r} = \mathrm{D}', \ \frac{\partial^2 \mathrm{D}}{\partial r^2} = \mathrm{D}'', \ \cdots.$$

那么

$$\begin{aligned} \mathrm{D}' &= \frac{1}{n-1} J^{\left(\frac{1}{n-1}-1\right)} J' J_\kappa^{-\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n-1} J^{\frac{1}{n-1}} J_\kappa^{\left(-\frac{1}{n-1}-1\right)} J_\kappa' \\ &= \frac{1}{n-1} J^{\frac{1}{n-1}} J_\kappa^{-\frac{1}{n-1}} (J^{-1}J' - J_\kappa^{-1}J_\kappa') \\ &\overset{(15.3)}{=} \frac{1}{n-1}\mathrm{D}(\Delta r - \Delta r_\kappa). \end{aligned} \tag{15.11}$$

再求导

$$\mathrm{D}'' = \frac{1}{n-1}[\mathrm{D}'(\Delta r - \Delta r_\kappa) + \mathrm{D}(\Delta r)' - \mathrm{D}(\Delta r_\kappa)']$$

$$\leqslant \mathrm{D}\left(\frac{\Delta r-\Delta r_\kappa}{n-1}\right)^2-\frac{\mathrm{D}}{n-1}\mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\mathrm{D}}{(n-1)^2}(\Delta r)^2+\mathrm{D}\kappa+\frac{\mathrm{D}}{(n-1)^2}(\Delta r_\kappa)^2$$

$$\overset{\text{曲率条件}}{\leqslant}\mathrm{D}\left(\frac{\Delta r-\Delta r_\kappa}{n-1}\right)^2-\frac{\mathrm{D}}{(n-1)^2}[(\Delta r)^2-(\Delta r_\kappa)^2]$$

$$=\frac{2\mathrm{D}}{(n-1)^2}\Delta r_\kappa(\Delta r_\kappa-\Delta r)$$

$$\overset{(15.11)式}{=}-\frac{2}{n-1}\mathrm{D}'\Delta r_\kappa$$

$$\overset{(15.3)式}{=}-\frac{2}{n-1}\mathrm{D}'\frac{J_\kappa'}{J_\kappa},\tag{15.12}$$

上式第二行用到了(15.5)式、(15.9)式和(15.11)式. 据此可得

$$(J_\kappa^{\frac{2}{n-1}}\mathrm{D}')'=\frac{2}{n-1}J_\kappa^{(\frac{2}{n-1}-1)}J_\kappa'\mathrm{D}'+J_\kappa^{\frac{2}{n-1}}\mathrm{D}''$$

$$=J_\kappa^{\frac{2}{n-1}}\left(\mathrm{D}''+\frac{2}{n-1}J_\kappa^{-1}J_\kappa'\mathrm{D}'\right)\overset{(15.12)式}{\leqslant}0.$$

对任何 $r\geqslant\varepsilon$, 成立

$$J_\kappa^{\frac{2}{n-1}}(r)\mathrm{D}'(r)\leqslant J_\kappa^{\frac{2}{n-1}}(\varepsilon)\mathrm{D}'(\varepsilon),$$

$$\mathrm{D}'(r)\leqslant J_\kappa^{-\frac{2}{n-1}}(r)J_\kappa^{\frac{2}{n-1}}(\varepsilon)\mathrm{D}'(\varepsilon)$$

$$\overset{(14.11)式}{=}\frac{1}{n-1}J_\kappa^{-\frac{2}{n-1}}(r)J_\kappa^{\frac{2}{n-1}}(\varepsilon)\left(J^{(\frac{1}{n-1}-1)}(\varepsilon)J_\kappa^{-\frac{1}{n-1}}(\varepsilon)J'(\varepsilon)-J^{\frac{1}{n-1}}(\varepsilon)J_\kappa^{(-\frac{1}{n-1}-1)}(\varepsilon)J'_\kappa(\varepsilon)\right)$$

$$\leqslant\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{n-1}J_\kappa^{-\frac{2}{n-1}}(r)J_\kappa^{\frac{2}{n-1}}(\varepsilon)\left(J^{(\frac{1}{n-1}-1)}(\varepsilon)J_\kappa^{-\frac{1}{n-1}}(\varepsilon)J'(\varepsilon)-J^{\frac{1}{n-1}}(\varepsilon)J_\kappa^{(-\frac{1}{n-1}-1)}(\varepsilon)J'_\kappa(\varepsilon)\right).$$

考虑到 J, J_κ 当 $r\to0$ 时的渐近形态(从度量张量的渐近性态可见),上式右端极限为零,即

$$\mathrm{D}'(r)\leqslant0\quad(\text{从(15.11)式即得 Laplace 比较定理 }\Delta r\leqslant\Delta r_\kappa).$$

这就得到,对任何 $x\in M$ 和 $x_0\in M_\kappa$, $\Sigma(x)$, $\Sigma_\kappa(x_0)$ 分别为切割迹内部,当 $(r,\theta)\in\Sigma(x)$, $r\in\Sigma_\kappa(x_0)$ 时,有

$$r\to\frac{J(r,\theta)}{J_\kappa(r)}\tag{15.13}$$

是单调下降的.

令 χ 是 $\Sigma(x)$的特征函数,即

$$\chi(r,\theta)=\begin{cases}1, & 当(r,\theta)\in\Sigma(x),\\ 0, & 当(r,\theta)\notin\Sigma(x).\end{cases}$$

类似地，有 χ_κ. 当 $\kappa>0$ 时，从 $\mathrm{Ric}_M\geqslant(n-1)\kappa$ 的条件，应用 Bonnet-Myers 定理，M 上极小测地线的长度小于等于 $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$，而它恰为 M_κ 中任一点到割点的距离；当 $\kappa\leqslant 0$ 时，M_κ 无割点，这时，$\chi_\kappa\equiv 1$. 在曲率条件的假定下，我们总有

$$\chi(r,\theta)\leqslant\chi_\kappa(r).$$

这说明

$$r\to\frac{\chi(r,\theta)}{\chi_\kappa(r)}\quad\left(\text{定义}\frac{0}{0}=0\right)$$

是下降的. 定义

$$\bar{J}=\chi J\ ,\ \bar{J}_\kappa=\chi_\kappa J_\kappa\,,$$

那么

$$r\to\frac{\bar{J}(r,\theta)}{\bar{J}_\kappa(r)}=\frac{J(r,\theta)}{J_\kappa(r)}\cdot\frac{\chi(r,\theta)}{\chi_\kappa(r)}\tag{15.14}$$

作为两个非负下降函数的积也是下降的. 设 $S(r)$ 和 $S_\kappa(r)$ 分别为 M 和 M_κ 中以 x 和 x_0 为中心、以 r 为半径的测地球面. $\int_{S(r)}\bar{J}(r,\theta)\mathrm{d}\theta$ 表示单位球面子集 $C(r)$ 上的积分，使对任何 $\theta\in C(r)$，测地线 $\gamma(s)=\exp_x(s\theta)$ 直到 $s=r$ 都在割迹之内，即 $C(r)=\{\theta\in S^n,\ \exp_x(r\theta)\in\Sigma_x\}$. 我们有

$$\begin{aligned}\int_{S(r)}\bar{J}(r,\theta)\mathrm{d}\theta&\overset{\text{def}}{=}\int_{S^{n-1}}\bar{J}(r,\theta)\chi(r,\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\int_{S^{n-1}}J(r,\theta)\chi(r,\theta)\mathrm{d}\theta=\int_{S(r)}J(r,\theta)\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

一般地，定义

$$\int_{S(r)}A'(r,\theta)\mathrm{d}\theta=\int_{S^{n-1}}A'(r,\theta)\chi(r,\theta)\mathrm{d}\theta.$$

对任何 $r_1\leqslant r_2$，有

$$\begin{aligned}\int_{S(r_2)}\bar{J}(r_1,\theta)\mathrm{d}\theta&=\int_{S^{n-1}}\bar{J}(r_1,\theta)\chi(r_2,\theta)\mathrm{d}\theta\\&\leqslant\int_{S^{n-1}}\bar{J}(r_1,\theta)\chi(r_1,\theta)\mathrm{d}\theta=\int_{S(r_1)}\bar{J}(r_1,\theta)\mathrm{d}\theta.\end{aligned}\tag{15.15}$$

从(15.14)式得

$$\bar{J}(r_2, \theta)\bar{J}_\kappa(r_1) \leqslant \bar{J}(r_1, \theta)\bar{J}_\kappa(r_2). \tag{15.16}$$

因此

$$\int_{S(r_2)} \bar{J}(r_2, \theta)\mathrm{d}\theta \bar{J}_\kappa(r_1) \overset{(15.16)式}{\leqslant} \int_{S(r_2)} \bar{J}(r_1, \theta)\mathrm{d}\theta \bar{J}_\kappa(r_2) \overset{(15.15)式}{\leqslant} \int_{S(r_1)} \bar{J}(r_1, \theta)\mathrm{d}\theta \bar{J}_\kappa(r_2),$$

即

$$\frac{\int_{S(r_2)} \bar{J}(r_2, \theta)\mathrm{d}\theta}{\bar{J}_\kappa(r_2)} \leqslant \frac{\int_{S(r_1)} \bar{J}(r_1, \theta)\mathrm{d}\theta}{\bar{J}_\kappa(r_1)},$$

即

$$\frac{\int_{S(r_2)} \bar{J}(r_2, \theta)\mathrm{d}\theta}{S_\kappa^{n-1}(r_2)\chi_\kappa(r_2)} \leqslant \frac{\int_{S(r_1)} \bar{J}(r_1, \theta)\mathrm{d}\theta}{S_\kappa^{n-1}(r_1)\chi_\kappa(r_1)},$$

考虑到

$$\int_{S(r)} \bar{J}_\kappa(r)\mathrm{d}\theta = \int_{S^{n-1}} S_\kappa^{n-1}(r)\chi_\kappa(r)\mathrm{d}\theta = S_\kappa^{n-1}(r)\chi_\kappa(r)\alpha^{n-1},$$

其中 α^{n-1} 为$(n-1)$ -维单位球面体积,所以得到

$$r \to \frac{\int_{S(r)} \bar{J}(r, \theta)\mathrm{d}\theta}{\int_{S(r)} \bar{J}_\kappa(r)\mathrm{d}\theta} \tag{15.17}$$

为单调下降的.

设

$$q(r) = \int_{S(r)} \bar{J}(r, \theta)\mathrm{d}\theta,\ q_\kappa(r) = \int_{S(r)} \bar{J}_\kappa(r)\mathrm{d}\theta.$$

那么,(15.17)式意味着

$$r \to h \overset{\text{def}}{=} \frac{q(r)}{q_\kappa(r)}$$

为单调下降函数.记

$$V(x, t) = \int_{B(t)\cap\Sigma(x)} J(r, \theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^t \mathrm{d}r \int_{S(r)} \bar{J}(r, \theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^t q(r)\mathrm{d}r,$$

以及

$$V_\kappa(t)=\int_0^t q_\kappa \mathrm{d}r,$$

对 $t_1\leqslant t_2$，有

$$\begin{aligned}\int_0^{t_1} q\mathrm{d}r\int_{t_1}^{t_2} q_\kappa \mathrm{d}r &= \int_0^{t_1} q_\kappa h\,\mathrm{d}r\int_{t_1}^{t_2} q_\kappa \mathrm{d}r\\ &\geqslant \int_0^{t_1} q_\kappa \mathrm{d}r h(t_1)\int_{t_1}^{t_2} q_\kappa \mathrm{d}r\\ &\geqslant \int_0^{t_1} q_\kappa \mathrm{d}r\int_{t_1}^{t_2} q_\kappa h\,\mathrm{d}r\\ &= \int_0^{t_1} q_\kappa \mathrm{d}r\int_{t_1}^{t_2} q\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

这就得到

$$\begin{aligned}\int_0^{t_1} q\mathrm{d}r\int_0^{t_2} q_\kappa \mathrm{d}r &= \int_0^{t_1} q\mathrm{d}r\int_{t_1}^{t_2} q_\kappa \mathrm{d}r+\int_0^{t_1} q\mathrm{d}r\int_0^{t_1} q_\kappa \mathrm{d}r\\ &\geqslant \int_0^{t_1} q_\kappa \mathrm{d}r\int_{t_1}^{t_2} q\mathrm{d}r+\int_0^{t_1} q\mathrm{d}r\int_0^{t_1} q_\kappa \mathrm{d}r\\ &= \int_0^{t_1} q_\kappa \mathrm{d}r\int_0^{t_2} q\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

$$\frac{\int_0^{t_1} q\mathrm{d}r}{\int_0^{t_1} q_\kappa \mathrm{d}r}\geqslant\frac{\int_0^{t_2} q\mathrm{d}r}{\int_0^{t_2} q_\kappa \mathrm{d}r},$$

即

$$t\to\frac{\int_0^t q(r)\mathrm{d}r}{\int_0^t q_\kappa \mathrm{d}r}$$

单调下降. 这样就证明了

$$t\to\frac{V(x,\ t)}{V_\kappa(t)}$$

是单调下降的. 我们有下列**体积比较定理**(定理 15.1).

定理 15.1 设 M 是 Ricci 曲率以 $(n-1)\kappa$ 为下界的 Riemann 流形. 设 $\gamma:[0,\ b]\to M$ 是从点 $x\in M$ 出发的无割点的弧长为参数的测地线. 那么

(i) 沿着 γ，$\dfrac{J(r,\theta)}{J_\kappa(r)}$是下降函数；

(ii) 又设 M 完备，那么，$\dfrac{V(x,t)}{V_\kappa(t)}$是 t 的下降函数；

(iii) 如果 M 完备并且 $\kappa>0$，那么

$$V(M)\leqslant V\left(S^n\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\right),$$

其中 $S^n\left(\dfrac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)$是半径为$\dfrac{1}{\sqrt{\kappa}}$的标准球面；当

$$V(M)=V\left(S^n\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\right)$$

时，M 等距于 $S^n\left(\dfrac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)$.

证明 我们已经证明了定理的前面两部分. 只要证明(iii).

从(i)得

$$\frac{\bar{J}(r,\theta)}{\bar{J}_\kappa(r)}\leqslant\lim_{r\to 0}\frac{\bar{J}(r,\theta)}{\bar{J}_\kappa(r)}=\lim_{r\to 0}\frac{J(r,\theta)}{J_\kappa(r)}=1,$$

从而

$$\bar{J}(r,\theta)\leqslant\bar{J}_\kappa(r),$$

$$V(M)=V\left(x,\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\right)\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}}\mathrm{d}r\int_{S(r)}\bar{J}_\kappa(r)\mathrm{d}\theta=V(M_\kappa).$$

如果等号成立，前面推导过程中得到的不等号都变成等号，也就得到 Laplace比较定理中等号成立的情形. 根据定理 14.11，包含 γ 切向的任一平面的截曲率为 κ. 由于 γ 是任意的，因此 M 也就具有常截面曲率 κ. 它的万有覆盖和 $S^n\left(\dfrac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)$等距. 如果

$$S^n\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\to M$$

有 k 重覆盖，那么

$$V(M)=\frac{1}{k}V(M_\kappa).$$

所以，$k=1$，也就是 M 和 $S^n\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)$ 等距.

证迄

现在我们来证明最大直径定理(定理 15.2). 它最早在截面曲率的假定下，由 T. A. Toponogov 所得到[26]，后来郑绍远[4]证明了下列更一般的定理. 这里运用体积比较定理的简化证明是 K. Shiohama 给出的[23].

定理 15.2 设 M 是完备的 Riemann 流形，它的 Ricci 曲率以 $(n-1)\kappa$ 为下界. 如果 M 的直径等于 $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$，那么，$M$ 和常截面曲率 κ 的球面等距.

证明 在 M 上取两点 x 和 y，使它们的距离恰为直径 $d(x, y)=\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$.

对任何 $0<t<R=\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$，从定理 15.1(ii)的结论，我们有

$$\frac{V(M)}{V(M_\kappa)}=\frac{V(x, R)}{V_\kappa(R)}\leqslant\frac{V(x, t)}{V_\kappa(t)},$$

即

$$V(x, t)\geqslant\frac{V_\kappa(t)}{V(M_\kappa)}V(M).$$

同理，有

$$V(y, R-t)\geqslant\frac{V_\kappa(R-t)}{V(M_\kappa)}V(M).$$

考虑到在半径为 $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ 的球面上有关系式

$$V_\kappa(t)+V_\kappa(R-t)=V(M_\kappa),$$

从而得到

$$V(x, t)+V(y, R-t)\geqslant\frac{V_\kappa(t)+V_\kappa(R-t)}{V(M_\kappa)}V(M)=V(M).$$

但是

$$B(x, t)\cap B(y, R-t)=\varnothing.$$

上面不等式只能为等式. 这就得到

$$\frac{V(M)}{V(M_\kappa)}=\frac{V(x, t)}{V_\kappa(t)}$$

对任何 $0 < t < R$ 成立. 因此

$$V(M) = V(M_\kappa).$$

根据定理 15.1(iii)的结论即得本定理的结论.

证迄

Bishop-Gromov 体积比较定理和 Laplace 比较定理一样,是在 Ricci 曲率有下界的条件下得到的. 而当 Ricci 曲率有上界时,只能对 Cartan-Hadamard 流形有如下结果.

定理 15.3 *设 M 是 Cartan-Hadamard 流形,它的 Ricci 曲率以负常数 κ 为上界. 那么,它测地球的体积至少是指数增长的.*

附注 J. Milnor[17] 证明任何负截面曲率的紧 Riemann 流形的基本群至少是指数增长的. 它希望曲率条件能减弱为 Ricci 曲率的条件. 但根据随后高志勇-丘成桐[10] 以及 J. Lohkamp[15] 的结果,我们知道具有负 Ricci 曲率度量的流形是没有拓扑障碍的. 因此,除了负 Ricci 曲率的条件外,还有另外的附加条件. 上述结果是得到 Milnor 定理推广的关键. 最早由杨义虎[32] 得到,它更一般的形式见[30].

证明 微分(15.3)式两端且考虑到(15.4)式,得到

$$\frac{\partial^2 J}{\partial r^2} = -J\mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) + J((\Delta r)^2 - |\,\mathrm{Hess}(r)\,|^2). \tag{15.18}$$

当 M 是 Cartan-Hadamard 流形时,我们有

$$(\Delta r)^2 \geqslant |\,\mathrm{Hess}(r)\,|^2,$$

且(15.18)式化为

$$\frac{\partial^2 J}{\partial r^2} \geqslant -J\mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right). \tag{15.19}$$

令

$$\widetilde{\mathrm{D}} = JJ_\kappa^{-\frac{1}{n-1}}.$$

我们有

$$\widetilde{\mathrm{D}}' = \widetilde{\mathrm{D}}\left(J^{-1}J' - \frac{1}{n-1}J_\kappa^{-1}J'_\kappa\right) = \widetilde{\mathrm{D}}\left(\Delta r - \frac{1}{n-1}\widetilde{\Delta} r\right). \tag{15.20}$$

从(15.3)式和(15.20)式我们得到

$$\widetilde{\mathrm{D}}'' = \widetilde{\mathrm{D}}\left(\frac{J'}{J} - \frac{1}{n-1}\frac{J'_\kappa}{J_\kappa}\right)^2 + \widetilde{\mathrm{D}}\left[\frac{J''}{J} - \left(\frac{J'}{J}\right)^2 - \frac{1}{n-1}\frac{J''_\kappa}{J_\kappa} + \frac{1}{n-1}\left(\frac{J'_\kappa}{J_\kappa}\right)^2\right].$$

从(15.10)式、(15.19)式和(15.20)式我们有

$$\widetilde{D}'' \geqslant \widetilde{D}\left(\frac{J'}{J}-\frac{1}{n-1}\frac{J'_\kappa}{J_k}\right)^2+\widetilde{D}\left[-\operatorname{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)-\left(\frac{J'}{J}\right)^2+\kappa+\frac{1}{(n-1)^2}\left(\frac{J'_\kappa}{J_k}\right)^2\right].$$

我们再假定 Ricci 曲率以负常数 κ 为上界,上式化为

$$\widetilde{D}'' \geqslant \frac{-2}{n-1}\frac{J'_\kappa}{J_\kappa}\widetilde{D}\left(\frac{J'}{J}-\frac{1}{n-1}\frac{J'_\kappa}{J_k}\right)=-\frac{2}{n-1}\frac{J'_k}{J_k}\widetilde{D}',$$

这里最后的等式来自(15.20)式. 从而

$$(J_\kappa^{\frac{2}{n-1}}\widetilde{D}')' = \frac{2}{n-1}J_\kappa^{\frac{2}{n-1}-1}J_\kappa D' + J_\kappa^{\frac{2}{n-1}}D'' = J_\kappa^{\frac{2}{n-1}}\left(\widetilde{D}''+\frac{2}{n-1}\frac{J'_\kappa}{J_k}\widetilde{D}'\right)\geqslant 0.$$

我们这就证明了 $J_\kappa^{\frac{2}{n-1}}\widetilde{D}'$ 关于 r 是单调增加的. 所以,对任何 $r\geqslant\varepsilon$, 有

$$\begin{aligned}\widetilde{D}'(r) &\geqslant J_\kappa^{-\frac{2}{n-1}}(r)J_\kappa^{\frac{2}{n-1}}(\varepsilon)\widetilde{D}'(\varepsilon)\\ &\geqslant \lim_{\varepsilon\to 0}J_\kappa^{-\frac{2}{n-1}}(r)J_\kappa^{\frac{2}{n-1}}(\varepsilon)v(\varepsilon)J_\kappa^{-\frac{1}{n-1}}(\varepsilon)\left(J^{-1}(\varepsilon)J'(\varepsilon)-\frac{1}{n-1}J_\kappa^{-1}(\varepsilon)J'_\kappa(\varepsilon)\right)=0.\end{aligned}$$

由于当 $\varepsilon\to 0$ 时, $J(\varepsilon,\theta)\sim\varepsilon^{n-1}J_\kappa(\varepsilon)\sim\varepsilon^{n-1}$, 因此也意味着

$$\widetilde{D}(r) = JJ_\kappa^{-\frac{1}{n-1}}$$

也是随 r 单调增加的. 由于 $J_\kappa(r)=\left(\frac{1}{\sqrt{-\kappa}}\sinh(\sqrt{-\kappa}r)\right)^{n-1}$, 因此对任何 $r>\varepsilon$, 当 $\varepsilon\to 0$ 时, 有

$$\frac{J(r,\theta)}{\frac{1}{\sqrt{-\kappa}}\sinh(\sqrt{-\kappa}r)}\geqslant\frac{\sqrt{-\kappa}J(\varepsilon,\theta)}{\sinh(\sqrt{-\kappa}\varepsilon)}\sim\varepsilon^{n-2}.$$

于是,我们有

$$J(r,\theta)\geqslant c\varepsilon^{n-2}\sinh(\sqrt{-\kappa}r),$$

其中 c 是常数. 因此,我们得到体积估计:当 t 充分大时,有

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol}(t) &= \int_0^t dr\int_{S(r)}v(r,\theta)d\theta\\ &\geqslant c\omega^{n-1}\varepsilon^{n-2}\int_0^t\sinh(\sqrt{-\kappa}r)dr = c'\omega^{n-1}\varepsilon^{n-2}\exp(\sqrt{-\kappa}t),\end{aligned}$$

其中 ω^{n-1} 表示单位球面 S^{n-1} 的体积, c' 是常数.

证迄

附　　录

Riemann 几何是在微分流形的基础上发展起来的. 为方便读者,本附录摘录了有关的基本内容. 它们在很多书中都能找到(如[7]).

Ⅰ. 微 分 流 形

一、微分流形的定义和例子

微分流形是一种空间,在这种空间中,我们能运用微积分. 它们是欧氏空间的推广. 记

$$\mathbb{R}^m = \{x = (x^1, \cdots, x^m),\ x^i \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant i \leqslant m\},$$

即 $\mathbb{R}^m$ 是 m 个有序实数所形成数组的集合. 在 $\mathbb{R}^m$ 中定义加法和数量乘法,使 $\mathbb{R}^m$ 成为实数域 $\mathbb{R}$ 上的 m 维向量空间. 空间 $\mathbb{R}^m$ 除上述线性结构外,还有典型的拓扑构造. 对 $x,\ y \in \mathbb{R}^m$, 设

$$d(x,\ y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x^i - y^i)^2}.$$

不难验证,函数 $d(x,\ y)$ 满足距离空间的条件. 所以 $d(x,\ y)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的距离函数,使 $\mathbb{R}^m$ 成为度量空间. 作为度量空间, $\mathbb{R}^m$ 有自然的拓扑结构,开球就是它的拓扑基.

定义Ⅰ.1　*设 M 是具有可列基的 Hausdorff 空间. 若对任一点 $p \in M$, 都存在 p 在 M 中的一个邻域 U,它同胚于 m 维欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 的一个开集,则称 M 是一个 m 维拓扑流形.*

设定义Ⅰ.1中的同胚是 $\varphi_U : U \to \varphi_U(U)$, 其中 $\varphi_U(U)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集. 称 $(U,\ \varphi_U)$ 是 M 的一个坐标图. $\forall q \in U$, 可将 $\varphi_U(q) \in \mathbb{R}^m$ 的坐标定义为 q 的坐标,即命

$$u^i = (\varphi_U(q))^i,\ q \in U,\ i = 1,\ \cdots,\ m,$$

我们称 u^i 为点 q 的局部坐标.

设(U, φ_U)和(V, φ_V)是流形 M 的两个坐标图,若 $U \cap V \neq \varnothing$,那么,$\varphi_U(U \cap V)$ 和 $\varphi_V(U \cap V)$ 是$\mathbb{R}^m$ 中两个非空的开集,并且映照

$$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1} |_{\varphi_U(U\cap V)} : \varphi_U(U \cap V) \rightarrow \varphi_V(U \cap V)$$

建立了这两个开集之间的同胚,其逆映射是 $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1} |_{\varphi_V(U\cap V)}$. 它们是从欧氏空间的一个开集到另一个开集的同胚. 所以,用坐标表示时,$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}$ 和 $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}$ 分别为欧氏空间的开集上的 m 个连续实函数 f^i 和 g^i:

$$v^i = f^i(u^1, \cdots, u^m) = (\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}(u^1, \cdots, u^m))^i,$$
$$u^i = f^i(v^1, \cdots, v^m) = (\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}(v^1, \cdots, v^m))^i.$$

对 M 的任何两个坐标图(U, φ_U)及(V, φ_V),如果 $U \cap V = \varnothing$ 或当 $U \cap V \neq \varnothing$ 时 f^i 和 g^i 都是 C^r 可微的,那么我们称这两个坐标图是 C^r-相容的.

定义 Ⅰ.2 设 M 是 m 维拓扑流形. 如果在 M 上给定了一个坐标图集

$$\mathscr{A} = \{(U, \varphi_U), (V, \varphi_V), (W, \varphi_W), \cdots\},$$

满足下列条件,则称 $\mathscr{A}$ 是 M 的一个 C^r 微分结构:

(i) $\{U, V, W, \cdots\}$是 M 的一个开覆盖,那么,$\mathscr{A}$ 称为 M 的坐标图册;

(ii) 属于 $\mathscr{A}$ 的任意两个坐标图是 C^r-相容的;

(iii) $\mathscr{A}$ 是极大的,即:对于 M 的任意一个坐标图$(\widetilde{U}, \varphi_{\widetilde{U}})$,如果它与 $\mathscr{A}$ 中的任何一个坐标图是 C^r-相容,则它必属于 $\mathscr{A}$.

若在 M 上给定了一个 C^r-微分结构,则称 M 是 C^r-微分流形.

附注 若坐标图集 $\mathscr{A}'$满足条件(i)和(ii),则对任何正整数 s, $0 < s \leqslant r$, 存在唯一的一个 C^s-微分结构 $\mathscr{A}$,使 $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$. 实际上,如果用 $\mathscr{A}$ 表示与 $\mathscr{A}'$中坐标图都是 C^s-相容的坐标图册,则 $\mathscr{A}$ 是 C^s-微分结构,它由 $\mathscr{A}'$唯一确定. 所以在构造微分流形时,只要指出它的一个相容坐标覆盖就可以了.

附注 由可列性假设,我们总可在微分流形 M 上选取可列个坐标图册.

例 Ⅰ.1 m 维欧氏空间$\mathbb{R}^m$(或它的任一开子集)显然是微分流形,它被一个坐标邻域所覆盖,坐标映照就是恒等映照.

例 Ⅰ.2 设 M 是微分流形,M'是 M 的任一开集. 那么,M'有从 M 上的诱导微分结构而构成的开子流形. 事实上,设 $\mathscr{A}$ 为 M 的微分结构,那么, $\mathscr{A}' = \{(U', \varphi'); U' = U \cap M, \varphi' = \varphi |_{U'}, U \subset \mathscr{A}\}$ 就构成 M'的微分结构.

例 Ⅰ.3 完全线性群: $GL(n, \mathbb{R}) = \{n \times n$ 的非奇异实数矩阵$\}$. 它是$\mathbb{R}^{n^2}$ 中的开子集,显然是微分流形.

例Ⅰ.4　乘积流形. 设 M_1 是 m_1 维微分流形, M_2 是 m_2 维微分流形. 那么, $M_1 \times M_2$ 具乘积拓扑空间而成为 m_1+m_2 维拓扑流形. 若 U_1 是 M_1 中开集, U_2 是 M_2 中开集, $\varphi_1: U_1 \to \varphi_1(U_1) \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $\varphi_2: U_2 \to \varphi_2(U_2) \subset \mathbb{R}^{m_2}$ 是同胚映照, 那么, 对 $p_1 \in U_1$, $p_2 \in U_2$, 得到

$$\psi(p_1, p_2) = (\varphi_1(p_1), \varphi_2(p_2)): U_1 \times U_2 \to \varphi_1(U_1) \times \varphi_2(U_2)$$

是 $U_1 \times U_2$ 到 $\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$ 的同胚映照. 设 $\mathscr{A} = \{(U_{1i}, \varphi_{1i})\}$ 是 M_1 中的微分结构, $\mathscr{A}_2 = \{(U_{2i}, \varphi_{2i})\}$ 是 M_2 中的微分结构, 那么, $\mathscr{A} = \{U_{1i} \times U_{2j}, \psi_{ij}\}$ 是 $M_1 \times M_2$ 中的微分结构, 其中, 当 $p_1 \in U_{1i}$, $p_2 \in U_{2i}$ 时, 有

$$\psi_{ij}(p_1, p_2) = (\varphi_{1i}(p_1), \varphi_{2j}(p_2)), \tag{Ⅰ.1}$$

并且 $\psi_{ij} \circ \psi_{kl}^{-1} = (\varphi_{1i} \circ \varphi_{1k}^{-1}, \varphi_{2j} \circ \varphi_{2l}^{-1})$ 是由 m_1+m_2 个可微函数组成的可微映照:

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = \bar{x}^1(x^1, \cdots, x^{m_1}), & \\ \quad\cdots\cdots & \text{构成 } \varphi_{1i} \circ \varphi_{1k}^{-1}, \\ \bar{x}^{m_1} = \bar{x}^{m_1}(x^1, \cdots, x^{m_1}), & \\ \bar{y}^1 = \bar{y}^1(y^1, \cdots, y^{m_2}), & \\ \quad\cdots\cdots & \text{构成 } \varphi_{2j} \circ \varphi_{2l}^{-1}. \\ \bar{y}^{m_2} = \bar{y}^{m_2}(y^1, \cdots, y^{m_2}), & \end{cases} \tag{Ⅰ.2}$$

这样, $M_1 \times M_2$ 关于微分结构 $\mathscr{A}$ 构成乘积微分流形.

例Ⅰ.5　欧氏球面

$$S^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1}, x^1(p)^2 + \cdots + x^{n+1}(p)^2 = 1\}.$$

设 U_i^+ 表示 S^n 中 $x^i > 0$ 的子集, U_i^- 表示 S^n 中 $x^i < 0$ 的子集. 对 $U_i^{\pm}$, 我们取余下的 x 为其坐标, 即取它在 $x^1, x^2, \cdots, x^{i-1}, x^{i+1}, \cdots, x^{n+1}$ 坐标平面上的投影. 对 S^n 中的点, $(x^1, \cdots, x^{n+1})$ 不全为零, 所以总属于某个 $U_i^{\pm}$, 那么, $U_i^{\pm}$ 全体覆盖了 S^n. 对 $p \in U_i^+ \cap U_j^+$, 不妨设 $j > i$, 有

$$U_i^+: (x^1, \cdots, x^{i-1}, x^{i+1}, \cdots, x^{j-1}, x^j, \cdots, x^{n+1}),$$
$$U_j^+: (x^1, \cdots, x^{i-1}, x^i, x^{i+1}, \cdots, x^{j-1}, x^{j+1}, \cdots, x^{n+1}).$$

对 p 有坐标变换

$$\begin{aligned} x^\alpha &= x^\alpha (\alpha \neq i, j), \\ x^i &= \sqrt{1 - \sum_{k \neq i} (x^k)^2}. \end{aligned} \tag{Ⅰ.3}$$

它当 $x^j > 0$ 时可微的. 这样, 我们就得到 S^n 上的微分结构.

例Ⅰ.6 特殊的乘积流形.

柱面：$S^1 \times \mathbb{R}$；

普通环面：$S^1 \times S^1$；

n 维环面：$T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$.

例Ⅰ.7 设 $M(m, n)$是 $m \times n$ 矩阵的全体,它能看作为欧氏空间 $\mathbb{R}^{mn}$,所以是解析流形. 又设 $M(m, n; k)$表示秩为 k 的 $m \times n$ 矩阵全体 $(0 \leqslant k \leqslant \min(m, n))$, 以 $M(m, n)$的诱导拓扑为其拓扑,那么,$M(m, n, k)$也是具可列基的 Hausdorff 空间.

设 $X_0 \in M(m, n)$, 如果 $\operatorname{rank}(X_0) = k$, 则存在 2 个可逆阵(置换阵)$P$ 和 Q,使

$$PX_0Q = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix},$$

其中,A_0 为 $k \times k$ 非奇异矩阵. 由连续性,存在 $\varepsilon > 0$,当 $A - A_0$ 的所有元素的绝对值都小于 ε 时,A 是非奇异的. 设 U^* 是 $M(m, n)$中 X 的全体,有

$$PXQ = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

这里, $A - A_0$ 的所有元素的绝对值小于 ε. 那么,U^* 是 $M(m, n)$中的开集.

如果 $X \in U^*$,则 $X \in M(m, n; k) \Leftrightarrow D = CA^{-1}B$. 因为

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -CA^{-1} & I_{m-k} \end{pmatrix}$$

是非奇异的,所以矩阵

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -CA^{-1} & I_{m-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix} \tag{Ⅰ.4}$$

与

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

有相同的秩,但(Ⅰ.4)式右端的矩阵的秩为 $k \Leftrightarrow D = CA^{-1}B$. 取 $U = U^* \cap M(m, n; k)$ 为 $X_0 \in M(m, n; k)$ 的坐标邻域,相应的坐标映照由

$$\varphi(X) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

定义,这里我们将 $\mathbb{R}^{mn-(m-k)(n-k)}=\mathbb{R}^{k(m+n-k)}$ 中的开集视作为所有形如

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix},\ A \text{ 非奇异}$$

的空间,则逆映照由

$$\varphi^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}Q^{-1}$$

给出.

如果(U,φ)和$(\widetilde{U},\widetilde{\varphi})$是两个坐标系,$U\cap\widetilde{U}\neq\varnothing$,则

$$\widetilde{\varphi}\circ\varphi^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \widetilde{\varphi}\left(P^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}Q^{-1}\right) = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \widetilde{C} & 0 \end{pmatrix},$$

其中

$$\widetilde{P}\,P^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}Q^{-1}\,\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{B} \\ \widetilde{C} & \widetilde{C}\widetilde{A}^{-1}\widetilde{B} \end{pmatrix}.$$

因此,$\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$ 的每个元素都是 A, B, C 的元素的有理函数,这使 $\mathscr{A}=\{(U,\varphi)\}$ 定义了 $k(m+n-k)$ 维的实解析结构,使 $M(m,n;k)$成为实解析流形.

例Ⅰ.8 实射影空间$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. 设 $X=\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ 是$\mathbb{R}^{n+1}$ 中的非零点全体. 对 x, $y\in X$, 如果存在非零实数 $t\neq 0$,使 $y=tx$,则 $x\sim y$. 点 x 的等价类$[x]$可看成是过原点的直线. 那么,商空间 $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})=X/\sim$ 称为实射影空间.

设 $\pi: X\to\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ 是自然投影. 在$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$上引入商拓扑:对任何 $U\subset\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, 如果 $\pi^{-1}(U)$是开集,则 U 定义为开集. 这样,π 是连续映照.

我们可进一步说明 π 是开映照.

事实上,设 $t\neq 0$ 是实数,$\varphi_t: X\to X$ 是由 $\varphi_t(x)=tx$ 定义的同胚($\varphi_t^{-1}=\varphi_{1/t}$). 若 $U\subset X$ 是开集,那么

$$\pi(U)=\bigcup_{t\neq 0}\varphi_t(U)$$

是开集. 设 $\{V_i\}$ 是 X 的可列基. 设 U 是$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$的任一开集,则 $\pi^{-1}(U)=\bigcup_{j\in J}V_j$,那么,$U=\pi\circ\pi^{-1}(U)=\bigcup_{j\in J}\pi(V_j)$, 因此,$\{\pi(V_i)\}$ 构成$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$的可列基.

为证明$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$是 Hausdorff 空间,我们先证明下列引理.

引理Ⅰ.3 **设 $\pi: X\to X/\sim$ 是开映照,那么,$Y=\{(x,y);\pi(x)=\pi(y)\}$ 是**

$X\times X$ 的闭子集的充要条件为 $X/\sim$ 是 Hausdorff 的.

证明 $\Rightarrow$:设 $(x, y)\notin Y$, 即 $\pi(x)$和 $\pi(y)$是 $X/\sim$中的不同点,那么,存在 (x, y)的邻域 $\widetilde{U}\times\widetilde{V}\cap Y=\varnothing$,即 $U=\pi(\widetilde{U})$ 和 $V=\pi(\widetilde{V})$ 是不相交的开集,且 $\pi(x)\in U$, $\pi(y)\in V$. 这就说明 $X/\sim$是 Hausdorff 空间.

$\Leftarrow$:若 $(x, y)\notin Y$, 即 $\pi(x)$和 $\pi(y)$是不同的点. 由假设存在不相交的开集 U, V,使 $\pi(x)\in U$, $\pi(y)\in V$,那么,$x\in\pi^{-1}(U)=\widetilde{U}$, $y\in\pi^{-1}(V)=\widetilde{V}$ 是开集. 所以, $\widetilde{U}\times\widetilde{V}$ 是包含(x, y)的开集,由 U 和 V 不相交得到 $\widetilde{U}\times\widetilde{V}\cap Y=\varnothing$. 因此,$Y$ 是闭集.

证迄

我们利用引理 Ⅰ.1 来证明$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$是 Hausdorff 空间. 在 $X\times X$ 上定义连续函数 $f:X\times X\to\mathbb{R}$:

$$f(x^1,\cdots,x^{n+1};y^1,\cdots,y^{n+1})=\sum_{i\neq j}(x^iy^j-x^jy^i)^2,$$

$f=0\Leftrightarrow\exists t\neq 0$ 使 $y=tx$. 因此

$$Y=\{(x, y);\ \pi(x)=\pi(y)\}=f^{-1}(0)$$

是 $X\times X$ 的闭集,由引理 Ⅰ.1 得到$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$是 Hausdorff 空间.

下面来定义$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$上的微分结构. 定义 $(n+1)$ 个坐标邻域 U_i 和坐标映照 φ_i, $i=1,\cdots,n+1$. 设$\widetilde{U}_i=\{x\in X;\ x^i\neq 0\}$, $U_i=\pi(\widetilde{U}_i)$,那么,$\varphi_i:U_i\to\mathbb{R}^n$ 定义为

$$\varphi_i([x])=\left(\frac{x^1}{x^i},\cdots,\frac{x^{i-1}}{x^i},\frac{x^{i+1}}{x^i},\cdots,\frac{x^{n+1}}{x^i}\right)=({}_i\xi_1,\cdots,{}_i\xi_{i-1},{}_i\xi_{i+1},\cdots,{}_i\xi_{n+1}),$$

其中 $[x]=[(x^1,\cdots,x^{n+1})]$ 是 U_i 中的任一元. 显然, 当 $x'\in\pi(x)$ 时, $\varphi_i([x'])=\varphi_i([x])$,并且 $\varphi_i([x'])=\varphi_i([x])$ 意味着$[x]=[x']$. 因此,$\varphi_i:U_i\to\mathbb{R}^n$ 是既单又满的连续映照. 反之,$\forall z\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\varphi_i^{-1}(z)=\pi(z^1,\cdots,z^{i-1},1,z^i,\cdots,z^n).$$

所以,$\varphi_i^{-1}(z)$为连续映照.

因而,$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$构成拓扑流形.

上面给出的坐标图是 C^∞-相容的. 事实上,对 $U_i\cap U_j\neq\varnothing(i\neq j)$, $\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}$ 为

$${}_j\xi_h=\frac{{}_i\xi_h}{{}_i\xi_j}\quad(h\neq i,j),$$

$${}_j\xi_i=\frac{1}{{}_i\xi_j}$$

是解析的,同样,$\varphi_i^{-1}\circ\varphi_j$ 也是解析的.因此,$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$构成 n 维解析流形.

例Ⅰ.9　Grassman 流形 $G_{k,n}$是$\mathbb{R}^n$ 中 k 维子空间的全体.当 $k=1$ 时就得到实射影空间$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.类似于例Ⅰ.8,从例Ⅰ.7 出发可得到 $G_{k,n}$中的微分结构.

拓扑流形可以不存在微分结构,也可以存在多个不同微分结构.

M. Kervaire 构造了一个 10 维拓扑流形,并且证明了在这个拓扑流形上不存在任何微分结构[13].

J. Milnor 构造了 7 维 Σ^7,与 7 维单位球面同胚,但它的微分结构与例Ⅰ.5 中的欧氏球面不同,称为 Milnor 怪球[18].后来知道,在 7 维球面上有 28 种不同的微分结构.而在 31 维球面上不同的微分结构数则超过 1 600 万种.

上世纪 80 年代初,S. Donaldson 和 M. Freedman 证明了在$\mathbb{R}^4$ 上存在异常微分结构[8,9].

在同一个拓扑流形上有不同微分结构从下列简单例子中即可以看出.

设$\mathbb{R}$是实数全体,它有标准微分结构.又设 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,由 $\varphi(u)=u^3$ 定义,则$(\mathbb{R},\varphi)$也是$\mathbb{R}$的一个光滑图册,它唯一地决定了$\mathbb{R}$上的一个微分结构 $\mathscr{A}'$.它是不同于 $\mathscr{A}$ 的,因为$(\mathbb{R},id)$与$(\mathbb{R},\varphi)$是不相容的局部坐标系(坐标变换 $id\circ\varphi^{-1}(u)=\sqrt[3]{u}$ 在 $u=0$ 处不可微).

二、可微函数与可微映照

在光滑流形上,光滑函数的概念是有意义的.

定义Ⅰ.4　*设 f 是定义在 m 维光滑流形 M 上的实函数.对 $p\in M$,(U,φ_U) 是点 p 附近的坐标图.那么,$f\circ\varphi_U^{-1}$* 是定义在欧氏空间$\mathbb{R}^m$ 上的开集 $\varphi_U(U)$上的实函数.如果函数 $f\circ\varphi_U^{-1}$ 在点$\varphi_U(p)\in\mathbb{R}^m$ 上是光滑的,则称函数在 $\varphi_U(p)$上是可微的.

显然函数 f 在点 p 的可微性与坐标图的选取无关.设(V,φ_V)是点 p 附件的另一坐标图,那么

$$f\circ\varphi_V^{-1}=(f\circ\varphi_U^{-1})\circ(\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}).$$

因为 $\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}$ 是光滑的,所以,$f\circ\varphi_V^{-1}$ 和 $f\circ\varphi_U^{-1}$ 在相应点都是可微的.

如果 f 在 M 上处处可微,则 f 是 M 上的可微函数,记为 $f\in C^k(M)$ 或 $C^\infty(M)$.

更一般地,我们可以定义可微映照.

定义Ⅰ.5　*设 M 和 N 分别是 m 维和 n 维的微分流形,$f:M\to N$ 是连续映照.对 $p\in M$,设(U,φ_U)和(V,φ_V)分别是 M 在点 p 及 N 在点 $f(p)$的坐标图,且 $f(U)\subset V$.如果复合映照*

$$\psi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

在点 p 是可微的，则称映照 f 在点 p 是可微的. 如果 f 在每点 $p \in M$ 都是可微的，则称 f 是可微映照.

设 U 中的局部坐标为$(u^1, \cdots, u^m)$，V 中的局部坐标为$(v^1, \cdots, v^n)$，那么，f 在(U, φ_U)，(V, ψ_V)的局部坐标表示为 $\psi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$：

$$\begin{cases} v^1 = (\psi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1})^1 (u^1, \cdots, u^m) \overset{\text{def}}{=} f^1(u^1, \cdots, u^m), \\ \quad \cdots\cdots \\ v^n = (\psi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1})^n (u^1, \cdots, u^m) \overset{\text{def}}{=} f^n(u^1, \cdots, u^m). \end{cases}$$

可微映照的另一个重要特例是流形上的参数曲线. 设 $M = (a, b) \subset \mathbb{R}$ 是开区间，则从 M 到 N 的光滑映照 $f:(a, b) \to N$ 称为 N 上的一条参数曲线.

例 I.10 在例 I.4 中给出了两个微分流形 M 和 N 的乘积流形 $M \times N$. 它到各因子的自然投影记作

$$\pi_1 : M \times N \to M, \ \pi_2 : M \times N \to N.$$

即对于 $(x, y) \in M \times N$，有

$$\pi_1(x, y) = x, \ \pi_2(x, y) = y.$$

它们都是光滑映照. 事实上，对 π_1，有

$$\begin{aligned} & \varphi_U \circ \pi_1 \circ \psi_{U \times V}^{-1} (x^1, \cdots, x^m; y^1, \cdots, y^n) \\ = & \varphi_U \circ \pi_1 (\varphi_U^{-1}(x^1, \cdots, x^m), \varphi_V^{-1}(y^1, \cdots, y^n)) \\ = & \varphi_U \circ \varphi_U^{-1}(x^1, \cdots, x^m) = (x^1, \cdots, x^m). \end{aligned}$$

显然，π_1 是可微映照. 同样 π_2 是可微映照.

对可微映照 $f:M \to N$ 在(U, φ_U)和(V, ψ_V)相应坐标图下的表示为 $\psi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$，它的 Jacobi 矩阵

$$\left(\frac{\partial v^i}{\partial u^\alpha} \right)_{\varphi_U(p)}$$

称为映照 f 在点 p 关于局部坐标系(u^α)和(v^i)点的 Jacobi 矩阵. 当取关于 p 和 $f(p)$不同的坐标图$(U', \varphi_{U'})$和$(V', \psi_{V'})$时，Jacobi 矩阵有相应的变化，但由于 M 和 N 上的流形结构，Jacobi 矩阵的秩与坐标图的选取无关.

定义 I.6 对可微映照 $f:M \to N$，秩

$$(\operatorname{rank} f)_p \overset{\text{def}}{=} \operatorname{rank}(\psi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1})_{\varphi_U(p)}$$

称为可微映照 f 在点 p 的秩.

如果映照 f 在一点 $p \in M$ 的秩是 k,不妨设

$$\det\left|\frac{\partial f^s}{\partial u^t}\right|_p \neq 0 \quad (s,\ t=1,\ \cdots,\ k).$$

那么,在点 p 的某邻域作坐标变换

$$\begin{cases} x^1 = f^1(u^1,\ \cdots,\ u^m), & s,\ t=1,\ \cdots,\ k; \\ x^a = u^a, & a,\ b=k+1,\ \cdots,\ m. \end{cases}$$

在这个坐标系下,映照 f 表示为 $v^a = f^a(x^1,\ \cdots,\ x^a)$,其中 $f^s = x^s$.

当 f 在点 p 的秩为 k 时,则它在点 p 的某邻域内的秩大于等于 k. 如果它在点 p 的某邻域的秩均为 k,我们进一步知道 $\dfrac{\partial f^a}{\partial x^b} \equiv 0$. 实际上,Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ * & \dfrac{\partial f^a}{\partial x^b} \end{pmatrix},$$

其中 I 为 $k \times k$ 的矩阵. 如果$\dfrac{\partial f^a}{\partial x^b}$有一个不为零,它的秩就大于 k. 因此有

$$v^a = f^a(x^s).$$

再在 $f(p)$的某邻域中作坐标变换:

$$\begin{cases} y^s = v^s, \\ y^{a'} = v^{a'} - f^{a'}(v^s). \end{cases}$$

这样映照 f 表示为

$$\begin{cases} y^s = v^s = f^s(x^s,\ x^a) = x^s, \\ y^{a'} = f^{a'}(x^s) - f^{a'}(x^s) = 0. \end{cases}$$

我们得到以下命题.

命题Ⅰ.7　设 $f: M \to N$ 是微分流形 M 到 N 的可微映照. 如果存在 $p \in M$, 使 f 在 p 近旁的秩均为 k, 那么, 存在 p 在 M 的邻域和 $f(p)$在 N 的邻域, 可使 $f^s(x^s,\ x^a)$, $f^a(x^s,\ x^a)$表示成 $f^s = x^s$, $f^a = 0$.

下面进一步考虑几种重要的可微映照.

定义Ⅰ.8　设 $f: M \to N$ 是可微映照. 如果 $\forall\, p \in M$, 有

$$(\operatorname{rank} f)_p = \dim M,$$

那么, f 称为浸入.

浸入最简单的例子是$\mathbb{R}^k$在$\mathbb{R}^l(l \geqslant k)$中的标准安装,即$(x^1, \cdots, x^k) \to (x^1, \cdots, x^k, 0, \cdots, 0)$的映照,称为规范浸入.命题Ⅰ.7告诉我们任何浸入$f$局部地等价于规范浸入.

定义Ⅰ.9 设$f: M \to N$是浸入,且它又是M和$f(M)$(作为N的相对拓扑空间)的同胚,则f称为嵌入.

浸入在局部是单的,在整体则不然,而嵌入必是单浸入,反之不然.

定义Ⅰ.10 设$f: M \to N$是可微映照.如果对任一紧集$K \subset N$,$f^{-1}(K)$是紧集,则f称为逆紧映照.

从逆紧映照的定义立即知道,从紧流形到任何流形的可微映照必是逆紧映照.

可以证明下列结果.设$f: M \to N$是单浸入,并且,它是逆紧映照,则f是嵌入.事实上,只要证明f是开映照即可.

定义Ⅰ.11 设$f: M \to N$是浸入,且$f: M \to N$是同胚,那么,f是微分同胚.如果在两个微分流形M和N间存在一个微分同胚映照,则两个流形称为微分同胚的(此时显然$\dim M = \dim N$).

对于微分流形,我们感兴趣的常常是它在微分同胚下保持不变的性质.对两个微分同胚的流形,在微分拓扑中是看成等价的.

前面,我们曾说明在$\mathbb{R}$上存在2个微分结构,一个是标准微分结构$(\mathbb{R}, id)$,另一个是微分结构$(\mathbb{R}, \varphi = u^3)$,而它们之间存在同胚$f: (\mathbb{R}, id) \to (\mathbb{R}, \varphi)$,由$f(x) = \sqrt[3]{x}$所定义,而

$$\varphi \circ f \circ id^{-1} = id,$$

f是浸入.所以,$\mathbb{R}$上这两个微分结构是等价的.

这样,同一拓扑流形上是否存在不同的微分构造这个问题的确切提法应该是:同一拓扑流形上可否有两个微分构造,使得由它们得出的微分流形是不微分拓扑的.Milnor的7维怪球以及$\mathbb{R}^4$上的异常微分结构就是这样的微分结构.

定义Ⅰ.12 设$f: M \to N$是可微映照,如果$\forall p \in M$,有

$$(\operatorname{rank} f)_p = \dim N,$$

那么,f称为淹没.

淹没最简单的例子是$\mathbb{R}^k$到$\mathbb{R}^l$,$k \geqslant l$的投影,它定义为$(x^1, \cdots, x^k) \to (x^1, \cdots, x^l)$.命题Ⅰ.7说明局部而言,淹没$f$等价于规范淹没-投影.

三、子流形

定义Ⅰ.13 设M与N是两个光滑流形,若$f: M \to N$是浸入,那么,M是

N 的浸入子流形. 简称为子流形.

定义 Ⅰ.14 设 M 与 N 是两个光滑流形, $f:M \to N$ 是单浸入, 那么, M 是 N 的嵌入子流形.

浸入子流形与嵌入子流形的区别在于:像集 $f(M)$是否有自交点.

对于嵌入子流形,由于 f 是单浸入,因此可以把 M 上的微分结构搬到像集 $f(M)$上去,但是 $f(M)$从 M 上通过 f 得到的拓扑与 $f(M)$作为 N 的子流形的子空间的拓扑并不一致. $f(M)$具有作为 N 的子空间的拓扑,它的开集为 $V \cap f(M)$, 其中 $V \subset N$ 是 N 的任一开集.

另一方面, $f(M)$也具有从映照 f 及 M 上的拓扑而来的拓扑. 它的开集为 $f(U)$,其中, U 是 M 的任一开集. 在这拓扑下, M 和 $f(M)$同胚.

两者关系如何呢? 对任一开集 $\forall V \subset N$, 我们有

$$V \cap f(M) = f(f^{-1}(V)),\ f^{-1}(V) \text{ 为 } M \text{ 上的开集}.$$

所以, $f(M)$中作为 N 的子空间的开集,一定是 $M \cong f(M)$ 的开集,所以后者的拓扑比前者"细".

定义 Ⅰ.15 设 M 与 N 是两个光滑流形, $f:M \to N$ 是嵌入, 那么, M 称为 N 的正则子流形.

例 Ⅰ.11 设 M 是微分流形, M'是 M 的任一开集. 在例 Ⅰ.2 中已说明了 M'具有从 M 继承的微分结构而构成微分流形. 那么,包含映照 $I:M' \to M$ 显然是嵌入,即 M'是 M 的正则子流形.

例 Ⅰ.12 例 Ⅰ.5 中的欧氏球面 S^n 也是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的正则子流形.

事实上,包含映照 $I:S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ 显然是同胚(因 S^n 上的拓扑本来就由诱导拓扑所定义). 而在任一局部坐标系 $U_i^{\pm}$ 中,有

$$\begin{aligned} & i_{\mathbb{R}^{n+1}} \circ I \circ (\varphi_i^{\pm})^{-1}(x^1, x^2, \cdots, x^{i-1}, x^{i+1}, \cdots, x^{n+1}) \\ & = \left(x^1, x^2, \cdots, x^{i-1}, \pm\sqrt{1-\sum_{\alpha \neq i}(x^{\alpha})^2}, x^{i+1}, \cdots, x^{n+1}\right), \end{aligned}$$

则其 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} I & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & I \\ \dfrac{\partial x^i}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{n+1}} \end{pmatrix},$$

它的秩为 n,因此, I 是嵌入.

例 Ⅰ.13 对环面 $T^2 = S^1 \times S^1$ 可引入坐标(θ^1, θ^2)，θ^i 以 mod 1 定义. 对任何(λ_1, λ_2)，定义映照 $f: \mathbb{R} \to T^2$: $f(t) = (\lambda_1 t, \lambda_2 t)$，显然，$f$ 是浸入. 欲使其为单映照，有

$$(\lambda_1 t, \lambda_2 t) = (\lambda_1 s, \lambda_2 s),$$

则

$$\lambda_1(t-s) = m, \lambda_2(t-s) = n.$$

如果 $t \neq s$，则

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{m}{n}$$

为有理数，所以当$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$为无理数时，$f$ 是单浸入，但 f 不是同胚.

事实上，$f(\mathbb{R})$在 T^2 上是处处稠密的. 对任何无理数 $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$，可用连分数$\frac{q_n}{p_n}$逼近，且有

$$\left|\lambda - \frac{q_n}{p_n}\right| < \frac{1}{p_n^2}.$$

据此有 $|\lambda p_n - q_n| < \varepsilon$. 对平面上任一点$(x_0, y_0)$，与其等价的点为 $(x_0 + l, y_0 + m)$，因此只要证明 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 整数 l, m，使

$$|\lambda(x_0 + l) - y_0 - m| < \varepsilon.$$

为此，首先有 $|\lambda l_1 - m_1| = |\lambda_1| < \varepsilon$，令

$$\left[\frac{y_0 - \lambda x_0}{\lambda_1}\right] = k,$$

而 $m = km_1$，$l = kl_1$，因此有

$$\begin{aligned}|\lambda(x_0 + l) - y_0 - m| &= |\lambda l - m - (y_0 - \lambda x_0)| = |\lambda l_1 k - m_1 k - (y_0 - \lambda x_0)| \\ &= |k(\lambda l_1 - m_1) - (y_0 - \lambda x_0)| \\ &\leqslant k|\lambda_1| - |y_0 - \lambda x_0| = |\lambda_1| \left|k - \frac{y_0 - \lambda x_0}{\lambda_1}\right| \leqslant |\lambda_1| < \varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了 $\overline{f(\mathbb{R})} = T^2$. 因此，$f(\mathbb{R})$不是闭集，而$\mathbb{R}$是闭集. 所以，$f$ 不是嵌入.

定义 Ⅰ.16 设 M 是 N 的闭子集，如果对每一点 $p \in M$，存在 p 在 N 上的坐标邻域 (U, φ)，$\varphi(U) = (u^1, \cdots, u^n)$，使 $M \cap U$ 由方程

$$u^{m+1} = \cdots = u^m = 0$$

所决定,则称 M 是 N 的闭子流形.

命题Ⅰ.17 闭子流形是正则子流形.

证明 赋予 M 以 N 的子空间的拓扑. 在 M 上还有从 N 上的诱导的微分结构如下. 设$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$是 N 中的一个坐标图集,使

$$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap M) = \{(u^1, \cdots, u^n) \in \varphi_\alpha, u^{m+1} = \cdots = u^n = 0\}.$$

记 $\widetilde{\mathscr{A}} = \{(\widetilde{U}_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha)\}$,其中,$\widetilde{U}_\alpha = U_\alpha \cap M$, $\widetilde{\varphi}_\alpha = \pi \circ \varphi_\alpha$,而$\pi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$是$\mathbb{R}^n$ 到它的第一个因子空间$\mathbb{R}^m$ 的投影. 显然,$\widetilde{U}_\alpha$ 是M 中的开子集,并且, $\widetilde{\varphi}_\alpha$: $\widetilde{U}_\alpha \to \widetilde{\varphi}_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$ 是同胚,因而,$(\widetilde{U}_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha)$ 是M上的坐标图册. 不难证得, $\widetilde{\mathscr{A}}$ 中的坐标变换是光滑的. 事实上,设$(\widetilde{U}_\alpha, \widetilde{\varphi}_\alpha)$ 和$(\widetilde{U}_\beta, \widetilde{\varphi}_\beta)$ 是$\widetilde{U}_\alpha \cap \widetilde{U}_\beta \neq \varnothing$ 的两个局部坐标系. 它们分别由 N 中的坐标图$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β)所导出. 这时有

$$\widetilde{\varphi}_\beta \circ \widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}(u^1, \cdots, u^m) = \pi \circ (u^1, \cdots, u^m, 0, \cdots, 0).$$

由于 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 是光滑的,因此 $\widetilde{\varphi}_\beta \circ \widetilde{\varphi}_\alpha^{-1}$ 也是光滑的. 这样,M 就构成微分流形.

考虑包含映照 $I: M \to N$,那么,$\forall p \in M$, $\exists p \in U$, (U, φ)是 N 的坐标图,它诱导了 p 在M 上的坐标图$(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$. 于是

$$\begin{aligned}\varphi \circ I \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(u^1, \cdots, u^m) &= \varphi \circ I \circ \varphi^{-1}(u^1, \cdots, u^m, 0, \cdots, 0)\\ &= (u^1, \cdots, u^m, 0, \cdots, 0)\end{aligned}$$

是光滑的,并且,I 是浸入. 因此,I 是嵌入,M 是 N 的正则子流形.

证迄

命题Ⅰ.18 设 M 是 n 维微分流形 N 的嵌入子流形,则 M 是 N 的正则子流形的充要条件为 M 是 N 中某一开子流形的闭子流形.

证明 由命题Ⅰ.17 充分性是显然的.

反过来,假定 M 是 N 的正则子流形. 设 $p \in M$, 则对点 p 的任意一个邻域 $U \subset M$,必有一点 $q = f(p)$ 在 N的一个邻域V,使 $f(U) = f(M) \cap V$. 根据命题Ⅰ.7,存在点 p 的局部坐标系(U_1, u^i)和点 q 的局部坐标系(V_1, v^α),使 $f(U_1) \subset V_1$, 并且,$f|_{U_1}$ 可表示为

$$f(u^1, \cdots, u^m) = (u^1, \cdots, u^m, 0, \cdots, 0). \qquad (\text{Ⅰ}.5)$$

不妨设 $U_1 \subset U$,故可取 $V_1 \subset V$,因此,$f(U_1) = f(M) \cap V_1$,而 $f(M) \cap V_1$ 由方程

$$v^{m+1} = v^{m+2} = \cdots = v^n = 0 \qquad (\text{Ⅰ}.6)$$

所定义.

对每一点 $q \in f(M)$，用 V_q 表示上面所构造的点 q 在 N 中的坐标邻域，使(Ⅰ.6)式成立. 令 $W = \bigcup_{q \in f(M)} V_1$，则 W 显然是 N 中包含 $f(M)$ 的开子流形. 要证明的是，集合 $f(M)$ 作为 N 的拓扑子空间是 W 中的相对闭子集，即证明 $W \cap f(M) = f(M)$. 首先，$f(M) \subset W \cap \overline{f(M)}$. 其次，任取一点 $s \in W \cap \overline{f(M)}$. 由 W 的定义，存在 $q \in f(M)$，使 $s \in V_q$，即 $s \in V_q \cap \overline{f(M)}$. 由(Ⅰ.6)式，$f(M) \cap V_q$ 是 V_q 的一个坐标面，所以，$f(M) \cap V_q$ 是 V_q 的相对闭子集. 现已假定 $s \in \cap V_q$，即 s 属于 $f(M) \cap V_q$ 在 V_q 中的相对闭包，所以

$$s \in f(M) \cap V_q \subset f(M) \cap W \subset f(M),$$

即

$$W \cap \overline{f(M)} \subset f(M),$$
$$W \cap \overline{f(M)} = f(M).$$

这就证明了 $f(M)$ 是 N 中的开子流形 W 中的闭子流形. 显然，M 和 $f(M)$ 是微分同胚：

(i) $f: M \to f(M)$ 是同胚；

(ii) $\forall p \in M$，存在坐标邻域 (U, ψ) 和 $f(U) \subset V_\alpha \subset f(M)$，使

$$\widetilde{\varphi}_\alpha \circ f \circ \psi^{-1} = \pi \circ \varphi_\alpha \circ f \circ \psi^{-1}(u^1, \cdots, u^m)$$

光滑且秩为 m. 因此，M 是 N 的开子流形的闭子流形.

证迄

在定理的证明过程中，我们已得到如下的结果.

子集 M 是光滑流形 N 的正则子流形，当且仅当对每一点 $p \in M$，存在 $q = f(p)$ 在 N 中的坐标图 (V, v^a)，$v^a(q) = 0$，使得 $M \cap V$ 是由

$$v^{m+1} = v^{m+2} = \cdots = v^n = 0$$

所定义.

这样，N 中的正则子流形 M 可以看作 N 中的子集 M，它具有子空间的拓扑，k 是一个固定的非负整数，$0 \leqslant k \leqslant n = \dim N$. 对每点 $p \in M$，都有 p 的坐标邻域 (U, φ)，使

(i) $\varphi(p)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的原点；

(ii) $\varphi(U \cap M) = \{(u^1, \cdots, u^n) \in \varphi(U);\ u^{k+1} = \cdots = u^n = 0\}$.

那么，M 是 N 的 k 维正则子流形.

命题Ⅰ.19 设 M 和 N 是 m 和 n 维的微分流形，$f: M \to N$ 是可微映照. 如

果对任何 $p \in M$，有

$$(\operatorname{rank} f)_p = l = \text{const},$$

则对任何 $q \in N$，原像

$$f^{-1}(q) = \{p \in M;\ f(p) = q\}$$

或者是空集，或者是 M 的 $m-l$ 维正则子流形.

证明　设 $f^{-1}(q) = M' \neq \varnothing$，$\forall p \in M'$. 从命题Ⅰ.7可知，存在 p 在 M 中的邻域 U 和 q 在 N 中的邻域 V，使 $f(U) \subset V$，f 表示为

$$\begin{cases} v^s = u^s, & s = 1, \cdots, l, \\ v^a = 0, & a = l+1, \cdots, n. \end{cases}$$

设 q 的坐标为0，那么，$M' \cap U = \{p' \in U;\ u^1(p') = \cdots = u^l(p') = 0\}$. 这样，在 M' 上可引进上述微分结构而成为 M 的正则子流形.

证迄

命题Ⅰ.19可用来证明球面等欧氏空间中的超曲面是正则子流形. 如设 $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^1$ 定义为

$$f(x^1, \cdots, x^{n+1}) = (x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2,$$

它是光滑映照，且

$$(\operatorname{rank} f)_p = \operatorname{rank}(2x^1, \cdots, 2x^{n+1})_p = 1,$$

只要 $p \not\equiv \{0\}$. 因此

$$S^n = \{(x^1, \cdots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1};\ f(x^1, \cdots, x^{n+1}) = 1\}$$

是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 n 维正则子流形.

又如 $SL(n, \mathbb{R}) = \{n \times n \text{阵} A; \det A = 1\}$. 令 $f(A) = \det A - 1$，$\dfrac{\partial f}{\partial a_{ij}} = A_{ij}$，其中，$A_{ij}$ 是第 i 行第 j 列的代数余子式，在 $SL(n, \mathbb{R})$ 上 A_{ij} 不能全为零. 因此，$\operatorname{rank} f = 1$，而 $SL(n, \mathbb{R}) = f^{-1}(0)$ 是 $n^2 - 1$ 维流形，且是 $GL(n, \mathbb{R})$ 的正则子流形.

四、切空间、余切空间、映照的微分

在古典向量分析中，一条曲线有切向量，一张平面有切平面. 对微分流形，在每一点附近也可以用线性空间来近似. 对 $\mathbb{R}^n$ 中的曲线

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)),$$

若 $\varphi(0)=p$，则它在 p 点的切向量是$(\varphi'_1(0),\cdots,\varphi'_n(0))$.

设 $C_u(M)$为所有(p,φ)元素的集合，$p\in M$，$\varphi:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$，$\varphi(0)=p$是过点 p 的光滑曲线，即 $C_u(M)$是 M 上所有曲线的全体. 有自然投影 $\pi:C_u(M)\to M$，$\pi(p,\varphi)=p$.

在 $C_u(M)$上引进等价关系：在点 p 附近取局部坐标系$(x^1,\cdots,x^m)$. 如果

$$p=p' \quad 及 \quad \left.\frac{\mathrm{d}(x^i\circ\varphi)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}-\left.\frac{\mathrm{d}(x^i\circ\varphi')}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0, \tag{Ⅰ.7}$$

则$(p,\varphi)\sim(p',\varphi')$.

首先，注意到对点 p 附近进行坐标变换 $y^i=y^i(x^1,\cdots,x^m)$，则

$$\frac{\mathrm{d}(y^i\circ\varphi)}{\mathrm{d}t}=\sum_j\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\frac{\mathrm{d}(x^j\circ\varphi)}{\mathrm{d}t}. \tag{Ⅰ.8}$$

因此，等价关系与局部坐标的选取无关.

定义Ⅰ.20 $T_xM=C_u(M)/\sim$ 是 $C_u(M)$关于上述等价关系的商空间. T_xM 的一个元素称为 M 的一个切向量. 若 $C_u(M)$的一个元素$(p,\varphi)\in X$，则称曲线与向量 X 相切.

对同一等价类 $X=[(p,\varphi)]$中的元素，所有 p 都相等. 因此，π 在 TM 上诱导了一个映照，仍记为 π. 若有 $\pi(X)=p$，则 X 称为点 p 的切向量. 点 p 的切向量的全体 $\pi^{-1}(p)$记为 T_pM，称为点 p 的切空间.

命题Ⅰ.21 T_pM 构成一个 m 维向量空间.

证明 取定点 p 附近的坐标图(U,h)，局部坐标为 $h(U)=(x^1,\cdots,x^m)$. 设 $X\in T_pM$，(p,φ)是任一与 X 相切的曲线. 定义 $\bar{h}:T_pM\to\mathbb{R}^m$ 如下：

$$\bar{h}(X)=(X^1,\cdots,X^m),其中\ X^i=\left.\frac{\mathrm{d}(x^i\circ\varphi)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}. \tag{Ⅰ.9}$$

X 是 $C_u(M)$的等价类. 因此，$\bar{h}$的定义与代表元(p,φ)的选取无关. 据此也得到$\bar{h}$是单映照. 反之，对任何$(X^1,\cdots,X^m)\in\mathbb{R}^m$，定义曲线

$$\varphi(t)=h^{-1}(h(p)+t(X^1,\cdots,X^m)),$$

它在$\bar{h}$作用下变成预先给定的$(X^1,\cdots,X^m)$. 所以，$\bar{h}$也是满映照.

对 $X,Y\in T_pM$，a,b是任意实数，定义

$$aX+bY\overset{\text{def}}{=}\bar{h}^{-1}(a\bar{h}(X)+b\bar{h}(Y)). \tag{Ⅰ.10}$$

它与局部坐标的选取无关. 事实上，设 $h'(U')=(y^1,\cdots,y^m)$是点 p 附近的另一坐标系. 按(Ⅰ.10)式的方式同样定义可得

$$\bar{h}'(X) = (Y^1, \cdots, Y^m),$$

而

$$Y^i = \sum \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{h(p)} X^j. \qquad (\text{I}.11)$$

(Ⅰ.11)式说明$\bar{h}' \circ \bar{h}^{-1}$是$\mathbb{R}^m$ 中的线性映照. 因此

$$\begin{aligned}\bar{h}^{-1}(a\bar{h}(X)+b\bar{h}(Y)) &= \bar{h}'^{-1} \circ \bar{h}' \circ \bar{h}^{-1}(a\bar{h}(X)+b\bar{h}(Y)) \\ &= \bar{h}'^{-1}(a\bar{h}' \circ \bar{h}^{-1}\,\bar{h}(X)+b\bar{h}' \circ \bar{h}^{-1}\,\bar{h}(Y)) \\ &= h'^{-1}(a\bar{h}'(X)+b\bar{h}'(Y)).\end{aligned}$$

这就证明了(Ⅰ.10)式中的定义是有意义的.

从(Ⅰ.10)式立即可知$\bar{h}$是线性同构.

证讫

设 f 是定义在 $p \in M$ 的一个邻域 U 上的可微函数. 所有这样的函数的集合记作 $\mathscr{F}_U$. 我们现在引进函数 f 关于点 p 的向量 X 的方向导数的概念. 为此有下列命题.

命题Ⅰ.22 对流形 M 上的每个切向量 X, 存在定义在 $\mathscr{F}_U$ 上的唯一线性泛函 L_X, 它对所有 $f, g \in \mathscr{F}_U$ 满足

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\ L_{aX+bY} = aL_X + bL_Y \quad (\text{线性}); \\ &\text{(ii)}\ L(fg) = f(p)L(g) + g(p)L(f) \quad (\text{Leibniz 法则}).\end{aligned} \qquad (\text{I}.12)$$

如果 $L_X = L_Y$, 则 $X = Y$. 如果 M 是解析或者 C^∞ 时, 则对任一满足 Leibniz 法则的 $\mathscr{F}_U$ 上的线性泛函 L, 必存在唯一的 $X \in T_pM$, 使 $L = L_X$.

证明 设(p, φ)与 X 相切, 定义

$$L_X(f) = \left.\frac{\mathrm{d}f[\varphi(t)]}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p \left.\frac{\mathrm{d}\varphi^i(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \overset{(\text{I}.9)}{=} \frac{\partial f}{\partial x^i}\bar{h}(X)^i. \qquad (\text{I}.13)$$

显然, (Ⅰ.13)式满足 Leibniz 法则. 若$(p, \varphi) \sim (p, \psi)$, 那么

$$\left.\frac{\mathrm{d}f[\varphi(t)]}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p \left.\frac{\mathrm{d}\varphi^i(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \overset{\text{等价}}{=} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p \left.\frac{\mathrm{d}\psi^i(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}f[\psi(t)]}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}. \qquad (\text{I}.14)$$

这说明(Ⅰ.13)式不依赖于(p, φ)的选取.

又若(Ⅰ.14)式对任何 f 成立, 特别取 $f = x^i$, 即得$(p, \varphi) \sim (p, \psi)$, 也就是说 $L_X = L_Y$ 蕴含 $X = Y$.

还能说明 $X \to L_X$ 的对应是线性的. 从(Ⅰ.13)式、(Ⅰ.9)式、(Ⅰ.10)式得

$$L_{aX+bY}(f)=\frac{\partial f}{\partial x^i}\{\bar{h}(aX+bY)\}^i=\frac{\partial f}{\partial x^i}(a(\bar{h}(X))^i+b(\bar{h}(Y))^i)$$
$$=a\frac{\partial f}{\partial x^i}(\bar{h}(X))^i+b\frac{\partial f}{\partial x^i}(\bar{h}(Y))^i$$
$$=aL_X(f)+bL_Y(f).$$

现在设 M 是 C^∞ 或者是解析的. L 是满足 Leibniz 法则的 $\mathscr{F}_U$ 上的线性泛函，其中 (U, h) 是点 p 附近的坐标邻域 $h(U)=(x^1, \cdots, x^m)$, $h(p)=(0, \cdots, 0)$. 从 Leibniz 法则知 $L(1)=2L(1)=0$. 因此, L 作用在常数上是零. 对任何 f, 作 Taylor 展开得

$$f\circ h^{-1}(x^1, \cdots, x^m)=f(p)+\sum a_ix^i+\sum x^ix^jf_{ij}(x^1, \cdots, x^m),$$

其中, f_{ij} 是 C^∞ 或者解析的(注:若 f 是 C^k, 则 f_{ij} 是 C^{k-2}, L 是定义在 C^k 上的线性泛函,因而证明失效).

$$L(x^ix^jf_{ij})=x^i(p)L(x^j)f_{ij}\circ h(p)+x^j(p)L(x^i)f_{ij}\circ h(p)$$
$$+x^i(p)x^j(p)L(f_{ij}\circ h(p))=0.$$

因此, $L(f)=\sum a_iL(x^i)$, 其中, $a_i=\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p$. 据此知 $L=L(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}$. 因此,取过点 p 的曲线,有

$$\varphi(t)=h^{-1}(tL(x^1), \cdots, tL(x^m)),$$

使 $L=L_X$, 其中, X 为与 (p, φ) 相切的向量.

证讫

附注 命题Ⅰ.22 说明流形 M 上的任一点的切空间可以看成为 $\mathscr{F}_U$ 上满足 Leibniz 法则的线性泛函的子空间. 当 M 为 C^∞ 或者是解析的,两个空间同构. 这样,我们不管 M 的可微类,总可以把形如(Ⅰ.13)式的线性泛函等价于和 (p, φ) 相切的切向量.

下面,利用上述切向量与线性泛函的等价性来决定 T_pM 的基. 设 φ_i 是坐标曲线,即

$$x^i(\varphi^j(t))=\delta^{ij}t.$$

它在点 p 的切向量等价于线性泛函 $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$, 其中

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p.$$

它们是独立的,构成了 T_pM 的基(从 f 可任意选取证明).

切空间的对偶空间为余切空间 T_p^*M. 设 f 是定义在点 p 的可微函数,则通过(Ⅰ.13)式,f 确定了 T_pM 上的线性泛函,记作$(\mathrm{d}f)_p$,即

$$\langle X_p, (\mathrm{d}f)_p\rangle = L_{X_p}(f). \tag{Ⅰ.15}$$

对任何局部坐标系$(x^1, \cdots, x^m)$,有

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, (\mathrm{d}x^j)_p \right\rangle = \delta_i^j. \tag{Ⅰ.16}$$

因此,$(\mathrm{d}x^j)_p$ 组成了 T_p^*M 关于$\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$ 的基. T_p^*M 的任一元素称为在点 p 的余切向量. 如果,f 是可微函数

$$(\mathrm{d}f)_p = \sum a_i \mathrm{d}x^i,$$

代入(Ⅰ.15)式、(Ⅰ.16)式,得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p \overset{(\text{Ⅰ}.15)式}{=} \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, (\mathrm{d}f)_p \right\rangle \overset{(\text{Ⅰ}.16)式}{=} a_i.$$

因此,有

$$(\mathrm{d}f)_p = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p (\mathrm{d}x^i)_p. \tag{Ⅰ.17}$$

这里,我们先定义切空间再定义余切空间,当然也可反过来先定义余切空间,如陈省身的书[7].

下面来考虑可微映照 $f:M \to N$ 的微分.

f 以明显的方式诱导了 $C_u(M)$到 $C_u(M)$的映照 f_*. 设 $(p, \varphi) \in C_u(M)$. 那么

$$f_*(p, \varphi) = (f(p), f\circ\varphi) \in C_u(N).$$

设 p 及 $f(p)$的附近的局部坐标系为(x^i)及(y^α). 若$(p, \varphi)\sim(p', \varphi')$,即

$$p = p', \left.\frac{\mathrm{d}(x^i\circ\varphi)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}(x^i\circ\varphi')}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0},$$

那么,$f(p) = f(p')$,并且

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}(y^\alpha\circ f\circ\varphi)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} &= \left.\frac{\mathrm{d}(y^\alpha\circ f\circ(x^i)^{-1}\circ x^i\circ\varphi)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\\ &= \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\right)_p \left.\frac{\mathrm{d}(x^i\circ\varphi)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\right)_p \left.\frac{\mathrm{d}(x^i\circ\varphi')}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\end{aligned}$$

$$= \frac{d(y^\alpha \circ f \circ \varphi')}{dt}\bigg|_{t=0}.$$

即 $f_*(p, \varphi) \sim f_*(p', \varphi')$. 这样,$f_*$ 诱导了 TM 到 TN 的映照,它称为映照 f 的微分. 特别地, $f_*: T_pM \to T_{f(p)}N$ 是线性映照. 事实上,对 $X \in T_pM$, 有

$$f_* X = \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \frac{d(y^\alpha \circ f \circ \varphi)}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\right)_p \frac{d(x^i \circ \varphi)}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\right)_p X^i.$$

f_* 的矩阵恰为映照 f 的 Jacobi 矩阵,因此,f 在 $p \in M$ 的秩数恰为 f 在点 p 的切空间诱导映照的秩数.

下面来看一个例子.

设 $U \subset \mathbb{R}^2$ 是开集,坐标为 (u, v), $r: U \to \mathbb{R}^3$ 是可微映照,由

$$r = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

所定义,那么,它就是普通微分几何中的曲面 S

$$r_* \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial}{\partial z},$$

$$r_* \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial}{\partial z}.$$

在 $\mathbb{R}^3$ 中取标准直角坐标,则 $\frac{\partial}{\partial x} = (1, 0, 0)$, $\frac{\partial}{\partial y} = (0, 1, 0)$, $\frac{\partial}{\partial z} = (0, 0, 1)$. 所以

$$r_* \frac{\partial}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial r}{\partial u},$$

$$r_* \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial r}{\partial v}$$

恰为曲面上的坐标曲线的切向量,它们张成切平面(若这两个向量不平行),这时曲面 S 称为正则曲面.

五、Sard 定理

定义 Ⅰ.23 设 $f: M_1 \to M_2$ 是微分流形 M_1 到微分流形 M_2 的 C^1 映照, $\dim M_i = m_i$, 凡使 $\operatorname{rank} f < m_2$ 的 M_1 的点称为 f 的临界点,其余 M_1 的点称为正规点,而临界点的映像称为临界值(即 $q \in M_2$,若它的原像至少有一点是临界点,则称 q 为临界值). M_2 上其余的点称为正规值.

附注 如果 $\dim M_1 < \dim M_2$, 则 M_1 的所有点都是临界点. $\forall q \in$

$M_2 \backslash f(M_1)$ 必是正规值.

与命题Ⅰ.19类似地,可以证明任一正则值的原像有好的几何结构,即如果原像集不是空集,则必是正则子流形.那么,可微映照是否有足够的正则值呢?我们将要证明的 Sard 定理对这个问题作了肯定的回答.

首先介绍零测度集(简称零集)的概念.

定义Ⅰ.24　设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是欧氏空间中的点集.如果对任何 $\varepsilon > 0$,存在一列球 B_r 使

(i) $A \subset \sum_{r=1}^{\infty} B_r$;

(ii) $\sum \mathrm{Vol}(B_r) < \varepsilon$.

则称 A 是零集,记为 $\mathrm{meas}\, A = 0$.

附注　这里的球 B_r 可以用开集 U_r 所代替.

命题Ⅰ.25　设 A_R 是零集,若集合 $A \subset \bigcup A_R$,则 $\mathrm{meas}\, A = 0$.

证明　事实上,$\forall \varepsilon > 0$,取覆盖 A_R 的球 $B_{k,r}$,使 $\sum_r \mathrm{Vol}\, B_{k,r} < \frac{\varepsilon}{2^k}$.那么,所有球 $B_{k,r}$ 盖住 A,它们至多可列个,且

$$\sum_{k,r} B_{k,r} < \varepsilon \sum \frac{1}{2^k} = \varepsilon.$$

证迄

例Ⅰ.14　设 $m < n$,则 $\mathbb{R}^m \times \{0\}$ 是 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ 中的零集,这里,0 表示 $\mathbb{R}^{n-m}$ 中的原点.

事实上,$\mathbb{R}^m \times \{0\}$ 可表示成可数个边长为单位长的方体 I 的并集,从命题Ⅰ.25,只要证明 $\mathrm{meas}\, I = 0$ 即可.

设对给定的 $1 > \delta > 0$,易看出,I 可被不多于 $\left(\frac{2}{\delta}\right)^m$ 个体积为 δ^n 的 n-方体所覆盖,这些方体的总体积为

$$V \leqslant \left(\frac{2}{\delta}\right)^m \cdot \delta^n = 2^m \delta^{n-m}.$$

若取每个 n 方体的外接球,则 I 被这些球全体所覆盖,而这些球的总体积为

$$V \leqslant 2^m \delta^{n-m} c,$$

其中,c 为 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的球体的体积.$\forall \varepsilon > 0$,取 $\delta^{n-m} < \frac{\varepsilon}{c 2^m}$.这时有

$$V \leqslant \varepsilon.$$

因此,I 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零集.

命题 Ⅰ.26 **设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是零测度集,U 是 A 的邻域,$\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ 是 C^1 映照,那么,mesa $\varphi(A) = 0$.**

证明 显然,$\bar{A} \subset U$.

(i) $\bar{A}$有界,则$\bar{A}$是紧集,那么,$\forall x, y \in \bar{A}$, φ 满足 Lipschitz 条件,由中值定理及紧集中连续映照取到极大极小值:

$$| \varphi(x) - \varphi(y) | < \mu | x - y |,$$

因为 meas $A = 0$,所以,$\forall \varepsilon > 0$,存在 B_k,使$\sum B_k < \frac{\varepsilon}{\mu^n}$,而 $A \subset \bigcup B_k$,所以,$\varphi(A) \subset \bigcup_\varphi (B_k)$. 对 $\varphi(x) \in \varphi(B_k)$,有 $| x - x_k | < \delta_k$(B_k 的定义), 于是,有

$$| \varphi(x) - \varphi(x_k) | < \mu | x - x_k | < \mu\delta_k.$$

令 $C_k = \{\varphi(x);\ | \varphi(x) - \varphi(x_k) | < \mu\delta_k\}$,则 $\varphi(B_k) \subset C_k$, $\varphi(A) \subset \bigcup C_k$,而 $\sum \mathrm{Vol}\, C_k = \sum \mu^n \mathrm{Vol}\, B_k < \varepsilon$. 因此,$\varphi(A)$是零集.

(ii) $\bar{A}$无界. 令 $\bar{A} = \bigcup \bar{A} \cap \{x;\ | x | \leqslant k\} = \bigcup \bar{A}_k$. 这样,每个$\bar{A}_k$ 是有界闭集. 如上述说明,从 meas $A_k = 0$ 得 $\varphi(A_k) = 0$, $\varphi(A) = \bigcup \varphi(A_k)$.

从命题Ⅰ.25 即知 meas $\varphi(A) = 0$.

证讫

有了欧氏空间中的零集就可用来定义微分流形上的零集.

定义 Ⅰ.27 **微分流形 M 上的集合 A,如果 $A = \bigcup A_n$,而每个 A_n 落在某个坐标邻域 U_n 中,相应的坐标映照为 φ_n,并且 $\varphi_n(A_n)$是 $\mathbb{R}^m$ 中的零集,那么,A 称为零集,记成 mesa $A = 0$.**

从命题Ⅰ.25 和命题Ⅰ.26 可见,上述定义不依赖 A 关于 A_n 的分解,或者说不依赖于坐标邻域的选取. 即对任意坐标图(V, ψ),有

$$\psi(V \cap A) = \psi(\bigcup U_n \cap V \cap A) = U\psi(U_n \cap V \cap A)$$
$$= \bigcup \psi \circ \phi_n^{-1} \circ \varphi_n(U_n \cap V \cap A).$$

显然, meas $\varphi_n(U_n \cap V \cap A) = 0$,而 $\psi \circ \varphi_n^{-1}$ 是可微映照. 于是,由命题 Ⅰ.25 和命题 Ⅰ.26 知 meas $\psi(V \cap A) = 0$.

命题 Ⅰ.28 **设 $\varphi: M_1^m \to M_2^m$ 是 C^1 映照,$A \subset M_1^m$ 且 meas $A = 0$,那么,** meas $\varphi(A) = 0$.

证明 设$\{(U_{1i}, \varphi_{1i})$是 M_1^m 的坐标图册,$\{(U_{2i}, \varphi_{2i})\}$是 M_2^m 的坐标图册.

meas $A=0$ 意味着 meas $\varphi_{1i}(A\cap U_{1i})=0$. 记

$$A_i=A\cap U_{1i},\ \varphi(A_i)=\bigcup_j\varphi(A_i)\cap U_{2j},$$

对每个 j,设 $A_{ij}\subset A_i$,而 $\varphi(A_{ij})=\varphi(A_i)\cap U_{2j}$.

显然, meas $\varphi_{1i}(A_{ij})=0$.

$$\begin{aligned}\varphi_{2j}(\varphi(A)\cap U_{2j})&=\varphi_{2j}(\varphi(\bigcup(A\cap U_{1i}))\cap U_{2j})\\&=\varphi_{2j}(\bigcup(\varphi(A_i)\cap U_{2j}))\\&=\bigcup\varphi_{2j}(\varphi(A_i)\cap U_{2j})=\bigcup\varphi_{2j}\circ\varphi(A_{ij})\\&=\bigcup\varphi_{2j}\circ\varphi\circ\varphi_{1i}^{-1}\circ\varphi_{1i}(A_{ij}),\end{aligned}$$

而 $\varphi_{2j}\circ\varphi\circ\varphi_{1i}^{-1}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的 C^1 映照. 由命题 Ⅰ.26 即得

$$\text{meas}\ \varphi_{2j}(\varphi(A)\cap U_{2j})=0.$$

证迄

引理 Ⅰ.29 设 $A\subset M$ 是微分流形 M 中的子集. 如果, $\forall\, p\in M$, 存在邻域 U_p,使 meas$(A\cap U_p)=0$,那么,meas $A=0$.

据此即知微分流形的正则子流形的像具零测度.

下面我们讨论 Sard 定理(定理 Ⅰ.30)本身.

定理 Ⅰ.30 设 M_1 和 M_2 分别是 m_1 维和 m_2 维的 C^k 类微分流形, $f:M_1\to M_2$ 是 C^k 类映照,那么,当

$$k-1\geqslant\max(m_1-m_2,\ 0)\tag{Ⅰ.18}$$

时,f 的临界值构成零集.

附注 1 当 $m_1<m_2$ 时,任一 C^1 映照 f 如果有 rank $f=l<m_2$, 从命题 Ⅰ.7 知,对任一 $p\in M_1$ 和 $f(p)\in f(M_1)$, 存在坐标图

$$(U_1,\ h_1)\text{和}(U_2,\ h_2),\ h_2(U_2)=(y^1,\ \cdots,\ y^{m_2}),$$

使 $f(U_1)\subset U_2$,并且 $h_2(f(M_1)\cap U_2)$ 由 $y^{l+1}=y^{l+2}=\cdots=y^{m_2}=0$ 表示. 这说明 $h_2(f(M_1)\cap U_2)$ 是 $\mathbb{R}^{m_2}$ 中的零集. 由引理 Ⅰ.29 知 $f(M_1)$是零集.

如果 rank $f\neq$ const,考虑$\tilde{f}:M_1\times\mathbb{R}^{m_2-m_1}\to M_2$, 它由

$$\tilde{f}(p,\ u)=f(p),\ \forall\,(p,\ u)\in M_1\times\mathbb{R}^{m_2-m_1}$$

所定义. 显然,$\tilde{f}$ 是 f 和投影映照的复合,是 C^1 映照,并且 $\tilde{f}(M_1\times\{0\})=f(M_1)$. 而 $M_1\times\{0\}\subset M_1\times\mathbb{R}^{m_2-m_1}$,其包含映照的秩为常数,且小于 m_2. 所以, $M_1\times\{0\}$ 是 $M_1\times\mathbb{R}^{m_2-m_1}$ 中的零集,从命题 Ⅰ.28 即得$\tilde{f}(M_1\times\{0\})=f(M_1)$是 M_2 中的零集. 因此,当 $m_1<m_2$ 时,Sard 定理显然是成立的.

附注 2　定理显然是关于一般微分流形而言的，但它可以化为欧氏空间情形考虑.

事实上，对任何临界值 $f(p)\in U_{2j}$，而 $p\in U_{1i}$，这里设 $\{(U_{1i},\ \varphi_{1i})\}$ 是 M_1 上的坐标图册，$\{(U_{2j},\ \varphi_{2j})\}$ 是 M_2 上的坐标图册，并且不妨设 $\varphi_{1i}(p)=\left(\frac{1}{2},\ \cdots,\ \frac{1}{2}\right)$，$f(U_{1i})\subset U_{2j}$. 那么

$$\varphi_{2j}\circ f\circ\varphi_{1i}^{-1}:\varphi_{1i}(U_{1i})\to\varphi_{2j}(f(U_{1i}))$$

是 C^k 映照. 总可取 $\varphi_{2j}(f(p))$ 的充分小范围 $\varphi_{2j}(U)$，使它的原像落在方体 $C:\{x\in\mathbb{R}^{m_1},\ 0\leqslant x_i\leqslant 1\}$ 之内. 而可微映照 f 的临界值实际上就是 $\varphi_{2j}\circ f\circ\varphi_{1i}^{-1}$ 的临界值. 所以，首先证明 $\mathbb{R}^{m_1}$ 中的方体到 $\mathbb{R}^{m_2}$ 中的 C^k 类映照在条件(Ⅰ.18)下的临界值是零集，由此得到 f 在 U 中的临界值是零集. 而所有 U 构成临界值集合的开覆盖. 从中取出可列子覆盖，再由可列可加性得到原定理的证明.

因此我们下面假定 M_2 是欧氏空间，M_1 是方体

$$C:\{x\in\mathbb{R}^{m_1},\ 0\leqslant x_i\leqslant 1\}$$

的子集，而 f 是方体 C 的某邻域到 $\mathbb{R}^{m_2}$ 中的 C^k 映照.

当 $m_1=m_2$ 时证明是容易的，我们首先证明之. 即有下列引理.

引理Ⅰ.31　**设 $\varphi=(\varphi^1,\ \cdots,\ \varphi^n)$ 是 $C:\to\mathbb{R}^n$ 的映照，其中，φ^i 在 C 的某邻域中是 C^1 类的，则临界值集合有零测度.**

证明　对 C 中任意两点 $x,\ y$，由中值定理及紧集上连续函数是有界的事实即得

$$\|\varphi(x)-\varphi(y)\|<a\|x-y\|. \tag{Ⅰ.19}$$

其次，对固定的 x，考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的仿射映照 T_x，它在 x 与 $\varphi(x)$ 相切，即令 $T_x(y)=(T_x^1(y),\ \cdots,\ T_x^n(y))$，而

$$T_x^i(y)=\varphi^i(x)+\sum_j\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(x)(y^j-x^j), \tag{Ⅰ.20}$$

$\left(\varphi^i(y)=\varphi^i(x)+\sum_j\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(z)(y^j-x^j)\right.$，其中，$z$ 是连接 xy 线段上的某一点，因此，T_x 是 φ 在点 x 的线性近似). 因此

$$\varphi^i(y)-T_x^i(y)=\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(z)-\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(x)\right)(y^j-x^j).$$

因为 $\varphi\in C^1$，所以，$\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}$ 在 C 中连续，因而是一致连续. 对任何 $i,\ j$，有

$$\left|\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(z)-\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(x)\right|\leqslant b_1(\|x-y\|),$$

其中,当 $\varepsilon\to 0$ 时 $b_1(\varepsilon)\to 0$. 因此

$$\begin{aligned}\|\varphi(y)-T_x(y)\| &\leqslant \sum_j\left|\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(z)-\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(x)\right|\cdot|y^j-x^j| \\ &\leqslant b_1(\|x-y\|)\left|\sum_j(y^j-x^j)\right| \qquad (\text{Ⅰ}.21)\\ &\leqslant \sqrt{n}b_1(\|x-y\|)\|x-y\|=b(\|x-y\|)\|x-y\|,\end{aligned}$$

其中, $b(\varepsilon)\xrightarrow{\varepsilon\to 0}0$.

从(Ⅰ.20)式可知 T_x 的变换行列式是 $\det\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(x)\right)$,如果 x 是临界点,则 $\det T_x=0$. 这就说明 T_x 把 $\mathbb{R}^n$ 中的点映照到过 $\varphi(x)$ 的 $n-1$ 维的平面 P_x.

当 $\|x-y\|<\varepsilon$ 时,(Ⅰ.19)式说明 $\|\varphi(y)-\varphi(x)\|<a\varepsilon$,(Ⅰ.21)式说明 $\varphi(y)$ 和 P_x 的距离小于 $\varepsilon b(\varepsilon)$,即 $\varphi(y)$ 在以 $\varphi(x)$ 为中心、以 $a\varepsilon$ 为半径的球内,也必在它的外切方体内,不妨取方体的一个平面平行于 P_x,同时 $\varphi(y)$ 也落在距 P_x 距离为 $\varepsilon b(\varepsilon)$ 的平行平面之间,考察方体和平行平面间的公共部分,它的体积为

$$(2a\varepsilon)^{n-1}\cdot 2\varepsilon b(\varepsilon)=2^n a^{n-1}\varepsilon^n b(\varepsilon).$$

现在把映照 φ 的定义域上的方体分成边长为 $\frac{1}{p}$ 的 p^n 个小方体,它的对角线长为 $\frac{\sqrt{n}}{p}$. 这样,任何一个包含临界点 x 的小方体必落在以 x 为中心、以 $\frac{\sqrt{n}}{p}$ 为半径的球 $B_x\left(\frac{\sqrt{n}}{p}\right)$ 之内. 由前面的分析可知

$$\operatorname{Vol}\left(\varphi\left(B_x\left(\frac{\sqrt{n}}{p}\right)\right)\right)\leqslant 2^n a^{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}}{p}\right)^n b\left(\frac{\sqrt{n}}{p}\right).$$

这样,φ 临界值的集合包含在这种至少包含一个临界点 x 的所有小方体映像的和. 而这样小方体至多只有 p^n 个. 因此全部体积不超过

$$p^n\operatorname{Vol}\left(\varphi\left(B_x\left(\frac{\sqrt{n}}{p}\right)\right)\right)\leqslant 2^n a^{n-1}n^{\frac{n}{2}}b\left(\frac{\sqrt{n}}{p}\right).$$

当 $p\to\infty$ 时,它趋向于零.

证迄

当 $m_1 > m_2$ 时,上述证明也可进行到最后,但得到的全部体积不超过

$$p^{m_1} 2^{m_2} a^{m_2-1} \left(\frac{\sqrt{m_1}}{p}\right)^{m_2} b\left(\frac{\sqrt{m_1}}{p}\right) = 2^{m_2} a^{m_2-1} n_1^{\frac{m_2}{2}} p^{m_1-m_2} b\left(\frac{\sqrt{m_1}}{p}\right). \quad (\text{I}.22)$$

但当 $p \to \infty$ 时,$p^{m_1-m_2} b\left(\frac{\sqrt{m_1}}{p}\right)$ 不一定趋于零. 因此,证明需要比中值定理更细致的估计. 这是由 A. P. Morse 得到的[19].

记 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$,对任一 $c = (c^1, \cdots, c^r) \in \mathbb{R}^r$,记 $V_c = \{c\} \times \mathbb{R}^{n-r}$. 令 $i_c: \mathbb{R}^{n-r} \to \mathbb{R}^n$ 为由

$$i_c(x) = (c^1, \cdots, c^r, x), \ \forall x \in \mathbb{R}^{n-r}$$

所定义的包含映照. 如果 $S \subset V_c$,使 $i_c^{-1}(S)$ 是 $\mathbb{R}^{n-r}$ 中的零集,则 S 称为 V_c 中的零集.

我们先证明下列 Fubini 定理.

Fubini 定理 设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭子集,使对每个 $c \in \mathbb{R}$,都有 $A \cap V_c$ 是 V_c 中的零集,即 $i_c^{-1}(A)$ 是 $\mathbb{R}^{n-r}$ 中的零集,则 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零集.

只证明 $r = 1$ 的情形,其余由归纳法可得. 为证明 Fubini 定理,我们需要下面几个引理.

引理 I.32 设 $\mathscr{E}$ 是闭区间 $[a, b]$ 的覆盖,它由 $[a, b]$ 中的开区间组成,则从 $\mathscr{E}$ 中可取出有限个子覆盖 $I_1, \cdots, I_N$,使

$$\sum_{k=1}^{N} d(I_k) < 2(b-a).$$

这里 $d(I_k)$ 表示区间 I_k 的长度.

证明 首先,容易从 $\mathscr{E}$ 中选取 $[a, b]$ 的有限子覆盖 $I_1, \cdots, I_N$,并满足

(i) $I_1, \cdots, I_N$ 的左端点互不相同(若左端点相同,总可取出区间小的一个);

(ii) $[a, b]$ 中的每个点最多含于 $I_1, \cdots, I_N$ 的两个区间中(I_i 中不存在 3 个区间其公共部分非空,若 3 个区间相交可将中间区间去掉).

这样,将上述区间按左端点从小到大顺序编号,设为 $I_k = (a_k, b_k)$,那么,必有

$$a_{i+1} \leqslant b_i \leqslant a_{i+2}, \ \forall i,$$
$$(a_i, b_i) \cap (a_{i+2}, b_{i+2}) = \varnothing. \ \forall i.$$

从而有

$$\sum_{k=1}^{N} d(I_k) = [d(I_1)+d(I_3)+\cdots]+[d(I_2)+d(I_4)+\cdots]$$
$$< (b-a)+(b-a) = 2(b-a).$$

证迄

引理 I.33 设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧致子集，如果 i_c^A 包含于 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的某个开子集 U 中，则有 $\mathbb{R}$ 中包含 c 的适当少的区间 I，使得

$$i_t^{-1}(A) \subset U, \ \forall t \in I.$$

证明 假设结论不成立，于是在 $\mathbb{R}$ 中可取一串含 c 的小区间 $I_1, \cdots, i_k, \cdots$，使 $I_1 \subset I_2 \cdots \subset I_k \subset \cdots$. 当 $k \to +\infty$ 时有 $d(I_k) \to 0$. 并且，对每个 k，存在 $t_k \in I_k$，使 $(t_k, x_k) \in A$ 而 $x_k \notin U$. 因为 A 紧致，所以存在收敛子序列，仍记为 $\{(t_k, x_k)\}$，若它收敛于 (c, x_0)，则有

$$x_k \to x_0 \in i_c^{-1}(A) \subset U.$$

这与 $x_k \notin U(\forall k)$ 矛盾.

证迄

Fubini **定理的证明** $\mathbb{R}^n$ 中的闭子集可表成可列个紧致子集之和，故不妨设 A 是紧致的. 于是，存在区间 $I=[a, b]$，使 $A \subset I \times \mathbb{R}^{n-1}$.

现在，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，由假设，对每个 $c \in I$，都有 $i_c^{-1}(A)$ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的零集，故有 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的长方体 $S_1(c), \cdots, S_{N_c}(c)$ 作为 $i_c^{-1}(A)$ 的覆盖，并使

$$\sum_{i=1}^{N_c} \mathrm{Vol}\, S_i(c) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

由引理 I.33 知存在含 c 的开区间 $I_c \subset I$，使对任一 $t \in I_c$，都有 $i_t^{-1}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{N_c} S_i(c)$. 而 $\{I_c;\ c \in I\}$ 是 I 的开覆盖. 由引理 I.32，从中可选出有限子覆盖，记为 $I_{c_1}, \cdots, I_{c_N}$，使

$$\sum_{k=1}^{N} d(I_{c_k}) < 2(b-a).$$

因此，$\{I_{c_k} \times S_i(c_k); 1 \leqslant k \leqslant N,\ 1 \leqslant i \leqslant N_{c_k}\}$ 是 A 的覆盖，并且有

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N_{c_k}} \mathrm{Vol}(I_{c_k} \times S_i(c_k)) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N_{c_k}} d(I_{c_k}) \mathrm{Vol}\, S_i(c_k)) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^{N} d(I_{c_k}) < \varepsilon.$$

这就证明了 Fubini 定理.

证迄

$m_1 > m_2$ 的 Sard 定理是下列一系列引理的推论.

引理 Ⅰ.34 设 φ 是 $B^{m_1} \to \mathbb{R}^{m_2}$ 的 C^1 映照,满足

$$\|\varphi(x)-\varphi(y)\| \geqslant \|x-y\|,$$

其中 B^{m_1} 是 $\mathbb{R}^{m_1}$ 中的闭球. 如果, $f \in C^k(k \geqslant 1)$ 是 $\mathbb{R}^{m_2}$ 中的一个函数,满足

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(x))\right| < b(\|x-y\|)\|x-y\|^{k-1}(j=1, \cdots, m_2), \quad (\text{Ⅰ}.23)$$

其中, b 是单调的,并且 $\lim_{\varepsilon\to 0} b(\varepsilon)=0$, 这里记 B^{m_1} 中的坐标为$(x^1, \cdots, x^\alpha, \cdots, x^{m_1})$, $\mathbb{R}^{m_2}$ 中的坐标为$(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_{m_2})$,那么

$$|f(\varphi(x))-f(\varphi(y))| < kb(\|x-y\|)\|x-y\|^k, \quad (\text{Ⅰ}.24)$$

而 k 只依赖于 φ.

证明 设 $F(t)=f(\varphi(y+(x-y)t))$, 那么

$$F(1)=f(\varphi(x)),\ F(0)=f(\varphi(y)).$$

根据中值定理,对 $0<t<1$, 有

$$F(1)-F(0)=F'(t)=\sum_{j,\alpha}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(y+(x-y)t))\frac{\partial \varphi^j}{\partial x^\alpha}(x^\alpha-y^\alpha),$$

其中 $\varphi=(\varphi^1, \cdots, \varphi^{m_2})$. 那么,由(Ⅰ.22)式得

$$\begin{aligned}
&|f(\varphi(x))-f(\varphi(y))|=|F(1)-F(0)|\\
&\leqslant \sum\nolimits_{j,\alpha}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(y+(x-y)t))\right|\cdot\left|\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^\alpha}\right|\cdot|x^\alpha-y^\alpha|\\
&< k_1\|x-y\|\sum\nolimits_j\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(y+(x-y)t))\right|\\
&\overset{(\text{Ⅰ}.22)\text{式}}{<} k_1\|x-y\|\cdot m_2 b(\|x-y\|)\|x-y\|^{k-1}t^{k-1}.
\end{aligned}$$

由 $b(\varepsilon)$单调, $0<t<1$,记 $k=k_1m_2$, 这就得到(Ⅰ.23)式的证明.

证迄

引理 Ⅰ.35 设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集, k 是非负整数. 那么,存在一列集合 $A_i(i\geqslant 0)$ 和映照 $\varphi_i(i\geqslant 1)$,其中, A_0 是可列的, $A\subset\bigcup_{r=0}^{\infty}A_r$,对 $i\geqslant 1$, φ_i 是闭球 $B_{\varepsilon_i}^{m_i}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 中的 C^1 同胚, $A_i\subset\varphi_i(B_{\varepsilon_i}^{m_i})$,其中,

$$B_\varepsilon^m=\{x;\ x\in\mathbb{R}^m\cap\|x\|\leqslant\varepsilon\},$$

满足

$$\|\varphi_r(x)-\varphi_r(y)\| \geqslant \|x-y\|,$$

并且,对任何 C^k 类在 A 上等于 0 的函数 f,存在单调的 $b_i(\varepsilon)\xrightarrow{\varepsilon\to 0}0$, 使

$$|f(\varphi_i(x))| < b_i(\|x-y\|)\|x-y\|^k,$$

其中

$$x,\ y\in B_{\varepsilon_i}^{m_i},\ \varphi_i(y)\in A_i.$$

证明　当 $k=0$ 时引理是容易证明的. 首先, $\mathbb{R}^n$ 可被可列个开球所遮盖,当然也被可列个对应的闭球所遮盖,设为 $\{B_r\}$. 这样

$$A=\bigcup_r A\cap B_r=\bigcup_r A_r,$$

其中 $A_r=A\cap B_r$, φ_r 是以零点为中心的球平移到 B_r,球半径大小被 B_r 的大小所确定,使得 $A_r\subset\varphi_r(B_{\varepsilon_i}^{m_i})$. 那么,连续函数 $f\varphi_r$ 在闭球体 B_r 上一定一致连续,故存在单调的 $b_i(\varepsilon)\xrightarrow{\varepsilon\to 0}0$, 使

$$|f(\varphi_r(x))-f(\varphi_r(y))| < b_r(\|x-y\|).$$

而当 $\varphi_r(y)\in A_i$ 时, $f(\varphi_r(y))=0$, 所以,(Ⅰ.24)式成立.

当 $n=1$ 时,设 A_0 是 A 的离散点. 这样,对任何在 A 上为 0 的 C^k 函数 f,取一列 $x_i\in A\backslash A_0$,均有 $f(x_i)=0$, 因此

$$f(x_i)=f'(x_i)=\cdots=f^{(k)}(x_i)=0.$$

当 $x_i\to x$ 时,有

$$f(x)=f'(x)=\cdots=f^{(k)}(x)=0. \tag{Ⅰ.25}$$

这样,(Ⅰ.25)式对任何 $x\in\overline{A\backslash A_0}$ 成立. 对 φ_i 和 B_i,和 $k=0$ 时取法一样,从而有 A_r,在 A_r 中将 $f\varphi_r(x)$Taylor 展开得

$$f\varphi_r(x)=f\varphi_r(y)+\cdots+(f\varphi_r)^{(k-1)}(y)(x-y)^{k-1}+(f\varphi_r)^{(k)}(x')(x-y)^k,$$

$x'\in(x,\ y)$.

当 $\varphi_r(y)\in A_r$ 时有 $f(\varphi_r(y))=0$, 因此

$$f\varphi_r(y)=(f\varphi_r)^{(k)}(x')(x-y)^k. \tag{Ⅰ.26}$$

$(f\varphi_r)^{(k)}$ 在 B_r 中是连续因而一致连续,存在单调的 $b(\varepsilon)\xrightarrow{\varepsilon\to 0}0$, 使

$$|(f\varphi_r)^{(k)}(x')-(f\varphi_r)^{(k)}(y)| < b(\|x'-y\|) < b(\|x-y\|).$$

将它代入(Ⅰ.26)式即得(Ⅰ.24)式.

下面对 $n+k$ 运用归纳法.

如果 $n+k<p$ 时引理成立,令 $n+k=p$, $n>1$, $k>0$, $A\subset\mathbb{R}^n$.

首先,将 A 分为两部分 $A=A_1\cup A_2$, 其中

$$A_1=\{x;\ x\in A,\ f\in C^k,\ f(A)=0,\ \sum_j\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2(x)=0\}.$$

由归纳法假设 $A_1=\bigcup A_1^r$ 和满足条件的映照 φ_1^r,使 $\varphi_1^r(B_{\varepsilon_r}^{m_r})\supset A_1^r$,且对 $g\in C^{k-1}$, $g(A_1)=0$ 和 $\varphi_1^r(y)\in A_1^r$ 的 g,有

$$|g(\varphi_1^r(x))|<b_1^r(\|x-y\|)\|x-y\|^{k-1}.$$

特别地,$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$满足对 g 的要求,因此有

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi_1^r(x))\right|<b_1^r(\|x-y\|)\|x-y\|^{k-1}.$$

于是,从引理Ⅰ.34 有(Ⅰ.23)式,即

$$|f(\varphi_1^r(x))-f(\varphi_1^r(y))|<kb^r(\|x-y\|)\|x-y\|^k.$$

若 $\varphi_1^r(y)\in A_1^r$,则 $f\varphi_1^r(y)=0$. 因此,(Ⅰ.24)式成立.

下面对 A_2 要做同样的事情.

设 $q\in A_2$ 是任一点. 那么, 至少存在函数 $g\in C^k$, $g(A)=0$ 而 $\sum\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)^2(q)\neq 0$. 不妨设 $\sum\frac{\partial g}{\partial x_n}(q)\neq 0$.

对 $x\in A_2$, 有

$$g(x_1,\cdots,x_n)=0.$$

由隐函数定理,存在点 q 的一个邻域 N 和 $\varphi^n(x_1,\cdots,x_{n-1})\in C^k(B_\varepsilon^{n-1})$, 使

$$g(x_1,\cdots,x_{n-1},\varphi^n(x_1,\cdots,x_{n-1}))\equiv 0.$$

即对 $\forall x\in A_2\cap N$,有$(x_1,\cdots,x_{n-1})\in C^k(B_\varepsilon^{n-1})$, 使

$$x=(x_1,\cdots,x_{n-1},\varphi^n(x_1,\cdots,x_{n-1})).$$

考虑单映照 $\varphi:B_\varepsilon^{n-1}\to\mathbb{R}^n$, 它定义为

$$\begin{cases}x_a=\varphi^a(x_1,\cdots,x_{n-1}),\\ x_n=\varphi^n(x_1,\cdots,x_{n-1}).\end{cases}$$

显然,$\varphi \in C^k$,并且

$$\|\varphi(x)-\varphi(y)\| = \sqrt{\sum_a (x_a - y_a)^2 + (\varphi^n(x_1, \cdots, x_{n-1}) - \varphi^n(y_1, \cdots, y_{n-1}))^2}$$
$$\geqslant \|x-y\|.$$

由此即知 φ^{-1}是连续的,且 $A_2 \cap N \subset \varphi(B_\varepsilon^{n-1})$.

我们对 $n-1$ 维空间中的集 $\varphi^{-1}(A_2 \cap N)$ 利用归纳法假设.即存在一列 D_0,D_r 和 ψ_r 满足引理要求,且对 $\psi_r(y) \in D_r$ 和 $h \in C^k$, $h(\varphi^{-1}(A_2 \cap N)) = 0$ 的h,有

$$|h(\psi_r(x))| < b_r(\|x-y\|)\|x-y\|^k. \tag{Ⅰ.27}$$

这样,我们得到

$$A_2 \cap N \subset \varphi(D_0) \cup_r \varphi(D_r).$$

而 $\varphi_r = \varphi\psi_r$ 是 C^1 的同胚,并且

$$\varphi_r(B_{\varepsilon_r}^{m_r}) = \varphi \circ \psi_r(B_{\varepsilon_r}^{m_r}) \supset \varphi(D_r) \overset{\text{def}}{=} C_r,$$
$$\|\varphi_r(y) - \varphi_r(x)\| = \|\varphi(\psi_r(y)) - \varphi(\psi_r(x))\| \geqslant \|\psi_r(y) - \psi_r(x)\|$$
$$\geqslant \|x-y\|.$$

并且,对任何 $f \in C^k$,有

$$f(A_2) = 0,\ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}(N \cap A_2) = 0,\ \varphi \circ \psi_r(y) \in \varphi(D_r) = C_r,$$

根据(Ⅰ.27)式有

$$|f\varphi_r(x)| = |f\varphi\psi_r(x)| < b_r(\|x-y\|)\|x-y\|^k.$$

这样,$\forall q \in A_2$,存在邻域 N,使 $A_2 \cap N$ 满足引理所求.这种 N 全体覆盖了 A_2,从中选取可列子覆盖$\{N_i\}$,而对 $A_2 \cap N_i$ 用上述方法得到C_r^i,$r \geqslant 0$ 和 φ_r 满足引理要求,而$\{C_r^i\}$全体构成 A_2 的覆盖.综合 A_1 和 A_2 的分解就得到引理Ⅰ.35 的证明.

证迄

引理Ⅰ.36 设 A 是$\mathbb{R}^n$ 的一个子集,k 是非负整数,那么,$A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$,其中,$A_0$ 是可列集.$A_i(i \geqslant 1)$ 有如下性质:f 是 C^k 类函数定义在 A 的一个邻域里,以 A 为临界点,于是,存在只依赖于 f 的单调函数 $b_i(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$,$\forall x, y \in A_i$,有

$$|f(x) - f(y)| < b_i(\|x-y\|)\|x-y\|^k. \tag{Ⅰ.28}$$

证明 A 是 f 的临界点,因此,$\frac{\partial f}{\partial x_j}(A)=0$,由引理Ⅰ.35 得到满足条件的一系列 A_i 和 φ_i. 而对 $\frac{\partial f}{\partial x_j}\in C^{k-1}$,由$\frac{\partial f}{\partial x_j}(A)=0$ 可知,必存在所要求 $b'_i(\varepsilon)$,使

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi_i(x))\right|<b'_i(\|x-y\|)\|x-y\|^{k-1}.$$

从而,由引理Ⅰ.34,对任何 $x, y\in B^{m_i}_{\varepsilon_i}$,有

$$\begin{aligned}|f\varphi_r(x)-f\varphi_r(y)|&<kb'_i(\|x-y\|)\|x-y\|^k\\&\leqslant kb_i(\|\varphi_i(x)-\varphi_i(y)\|)\|\varphi_i(x)-\varphi_i(y)\|^k.\end{aligned}$$

而 φ_i 是同胚映照. 所以,$\forall x, y\in A_i$,有

$$|f(x)-f(y)|<b_i(\|x-y\|)\|x-y\|^k.$$

证迄

引理Ⅰ.37 设 $f=(f^1,\cdots,f^{m_2})$ 是 $\mathbb{R}^{m_1}$ 中的单位方体 $C=\{x\in\mathbb{R}^{m_1}; 0\leqslant x^i\leqslant 1\}$ 到 $\mathbb{R}^{m_2}$ 的映照,每一个 f^i 是定义在 C 的邻域中的 C^k 类函数,$A\subset C$ 是 φ 的零秩点. 那么,当 $k\geqslant\frac{m_1}{m_2}$ 时,$\varphi(A)$ 是零集.

证明 利用引理Ⅰ.36 分解 A, $A\subset\bigcup A_r$. 我们只要证明 $\operatorname{meas} f(A_r)=0$. 它当 $r=0$ 时显然成立. 下面考虑 $r\geqslant 1$ 时的情形. f 的零秩点,即是每个 f^i 的临界点,那么从引理Ⅰ.36, $\forall x, y\in A-r$,及 $\|x-y\|<\varepsilon$,有

$$|\varphi^r(x)-\varphi^r(y)|<b(\varepsilon)\varepsilon^k,$$

即

$$|f(x)-f(y)|<\sqrt{m_2}\,b(\varepsilon)\varepsilon^k. \tag{Ⅰ.29}$$

下面和引理Ⅰ.31 的证明一样,把单位方体分成边长为$\frac{1}{p}$的 p^{m_1} 个小方体 C_α,每个小方体的对角线之长为$\frac{\sqrt{m_1}}{p}$. 这样,$C_\alpha\cap A_r$ 中的点距离小于$\frac{\sqrt{m_1}}{p}$. 由估计(Ⅰ.29)式,它在 f 的映照下落在半径为

$$\sqrt{m_2}\,b\left(\frac{\sqrt{m_1}}{p}\right)\left(\frac{\sqrt{m_1}}{p}\right)^k$$

的球内,即 $f(A_r\cap C_\alpha)$ 落在上述球内. 设$\mathbb{R}^{m_2}$中单位球体积为 ω_{m_2},那么

$$\text{meas}\, f(A_r \cap C_a) \leqslant (\sqrt{m_2})^{m_2} b^{m_2} \left(\frac{\sqrt{m_1}}{p}\right)\left(\frac{\sqrt{m_1}}{p}\right)^{km_2} \omega_{m_2}$$

$$= kb^{m_2}\left(\frac{\sqrt{m_1}}{p}\right) p^{-km_2},$$

其中，$k = m_2^{\frac{m_2}{2}} m_1^{\frac{km_2}{2}} \omega_{m_2}$，因此

$$\text{meas}\, f(A_r) \leqslant p^{m_1} kb^{m_2}\left(\frac{\sqrt{m_1}}{p}\right) p^{-km_2} = kb^{m_2}\left(\frac{\sqrt{m_1}}{p}\right) p^{m_1 - km_2}.$$

当 $k \geqslant \frac{m_1}{m_2}$ 时，$m_1 - km_2 \leqslant 0$，$\text{meas}\, f(A_r) \xrightarrow{p \to \infty} 0$.

证迄

引理Ⅰ.38　设 $f: C \to \mathbb{R}^{m_2}$ 同引理Ⅰ.37. A 是使 f 有秩 r 的点集. 那么，当 $k \geqslant \frac{m_1 - r}{m_2 - r}$ 时，$\text{meas}\, f(A) = 0$，$0 \leqslant r \leqslant m_2$.

证明　当 $r = 0$ 时即为引理Ⅰ.37 的情形.

设 $x_0 \in A$，φ 在 x_0 的秩为 r. 那么从命题Ⅰ.7 的证明过程中知道，必存在 x_0 的邻域 U，坐标为 $u^1, \cdots, u^{m_1}$，和 $f(x_0)$ 的邻域 V，$f(U) \subset V$，V 中的坐标为 $v^1, \cdots, v^{m_2}$，使 f 有表达式

$$\begin{cases} v^s = u^s, & s = 1, \cdots, r, \\ v^a = F^a(u^1, \cdots, u^{m_1}). & a = r+1, \cdots, m_2. \end{cases}$$

而对 $A \cap U$ 的所有点 $\frac{\partial F^a}{\partial u^{s'}} = 0$，$s' = r+1, \cdots, m_1$.

对于固定的 $u^1, \cdots, u^r$，考虑映照 $\psi: \mathbb{R}^{m_1 - r} \to \mathbb{R}^{m_2 - r}$，它定义为

$$\psi^a(u^{r+1}, \cdots, u^{m_1}) = F^a(u^1, \cdots, u^r, u^{r+1}, \cdots, u^{m_1}).$$

那么，ψ 在 $A \cap U$ 中的秩为零. 由引理Ⅰ.37 得 $\psi(A \cap U)$ 在

$$V_{u^1, \cdots, u^r} = \{(u^1, \cdots, u^r) \times \mathbb{R}^{m_2 - r}\}$$

中的测度为零. 而

$$\psi(A \cap U) = f(A \cap U) \cap V_{u^1, \cdots, u^r}$$

为 $V_{u^1, \cdots, u^r}$ 中的零集. 由 Fubini 定理得 $f(A \cap U)$ 为 $\mathbb{R}^{m_2}$ 中的零集. 由引理Ⅰ.29 即得 $\text{meas}\, f(A) = 0$.

证迄

定理Ⅰ.30 的证明　如果 f 的临界点集合是 A，那么，$A = \bigcup_{r=0}^{m_2 - 1} A_r$，每个

A_r 是 f 的秩为 r 的点集. 那么,临界值的集合为 $\bigcup_{r=0}^{m_2-1} f(A_r)$. 对每个 r,当 $k \geqslant \frac{m_1-r}{m_2-r}$ 时 meas $f(A_r)=0$. 而 $\rho(r)=\frac{m_1-r}{m_2-r}$ 是 r 的单调增加函数,所以, $\max_{0\leqslant r\leqslant m_2-1}\rho(r)=m_1-m_2+1$, 即当 $k\geqslant m_1-m_2+1$ 时,使

$$\text{meas } f(A_r)=0,\ r=0,\ 1,\ \cdots,\ m_2-1.$$

证迄

附注 在 Sard 定理中,光滑条件 $k-1\geqslant \max(m_1-m_2,\ 0)$ 是必不可少的. 否则有反例,被 H. Whitney 所得到[28].

六、单位分解

单位分解是微分流形理论中的重要技术,我们来证明单位分解的存在性. 为此先作一点准备.

定义 Ⅰ.39 设 X 是拓扑空间,U_α 是 X 中的集合族. 如果 $\forall p\in X$, 存在 p 的邻域 N_p, 使 $\{\alpha;\ U_\alpha\cap N_p\neq\varnothing\}$ 是有限的,则称集合族$\{U_\alpha\}$称为局部有限的.

在微分流形上,如果图集$\{U_\alpha,\ h_\alpha\}$中$\{U_\alpha\}$是局部有限的,那么,它称为局部有限图集.

定义 Ⅰ.40 设$\{V_\beta\}$和$\{U_\alpha\}$是 X 的两个覆盖. 如果 $\forall\beta$, 至少存在一个 α, 使 $V_\beta\subset U_\alpha$, 那么覆盖$\{V_\beta\}$称为$\{U_\alpha\}$覆盖的细分. 一个 Hausdorff 空间 X 如果对它的每个开覆盖都存在一个局部有限的细分,那么,X 称为仿紧空间.

引理 Ⅰ.41 设 X 是局部紧,具有可列基的 Hausdorff 空间,那么,X 必是仿紧空间. 特别地,每一个微分流形是仿紧空间.

证明 由于 X 是局部紧致的,因此存在 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$,使其中每一个开集 $U\subset\mathscr{U}$的闭包是紧致的. 又由于 X 具可列基,不妨设 $\mathscr{U}$ 是可列覆盖. 设 $\mathscr{U}=\{U_1,\ U_2,\ \cdots,\}$. 我们可用归纳的方式定义紧致族 A_i 如下:

$A_1=\overline{U_1}$,则 A_1 是紧致的. 设 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_{i-1}$ 已定义好,它们都是 X 中的紧致集,并且,$A_j\subset \text{Int } A_{j+1},\ 1\leqslant j\leqslant i-2$. 记 s 是使 $A_{i-1}\subset U_1\cup\cdots\cup U_s$ 成立的最小正整数. 令

$$A_i=\overline{U_1\cup U_2\cdots\cup U_s},$$

这样构造的递增紧集序列 $A_1\subset \text{Int } A_2\subset A_2\subset\cdots$ 且

$$\bigcup_i A_i=\bigcup_s U_s=X.$$

记紧集 $B_i=A_i-\text{Int } A_{i-1}$, 显然,$X=\bigcup_i B_i$, 而 $\text{Int } A_{i+1}-A_{i-2}\supset B_i$ 是开集.

设 $\mathscr{W}=\{W_\alpha\}$ 是 X 的任一开覆盖. 我们来构造 $\mathscr{W}$的局部有限细分.

注意到对每个 i, $\{\text{Int } A_{i+1}\backslash A_{i-2}\}$ 是 B_i 的开覆盖. 由 B_i 的紧致性,可从中选

取有限子覆盖,记为 $\mathscr{B}_i = \{V_1^{(i)}, \cdots, V_{n_i}^{(i)}\}$. 设

$$\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2 \cdots,$$

则 $\mathscr{B}$ 是 X 的开覆盖,由 $\mathscr{B}$ 的作法可见 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{W}$ 的细分,$\mathscr{B}$ 也是局部有限的. 事实上, $\forall x \in X$,必存在 B_i,使 $x \in B_i \subset \mathrm{Int}\, A_{i+1} - A_{i-2}$ 是 x 的邻域. 显然当 $j \geqslant i+3$ 时,$\mathscr{B}_j$ 中的元素与 $\mathrm{Int}\, A_{i+1} - A_{i-2}$ 不相交,而 $\mathscr{B}_1, \cdots, \mathscr{B}_{i+2}$ 中的 $\{V_{n_j}^{(j)}\}$ 是有限的.

证讫

对微分流形,它的开覆盖还可取得更为精密一些.

引理 Ⅰ.42 设 M 是 m 维微分流形,$\mathscr{W} =$ 是 M 的一个开覆盖,那么,存在 M 的一个光滑图册 $\{(V_i, h_i)\}$ 满足下列要求:

(i) $\{V_i\}$ 是 $\{W_\alpha\}$ 的局部有限细分;

(ii) 对 $\forall i$,有 $h_i(V_i) = B^m(3)$,其中,$B^m(r) = \{x \in \mathbb{R}^m, \| x \| < 3\}$;

(iii) 记 $O_i = h_i^{-1}(B^m(1))$,则 $\{O_i\}$ 仍是 M 的覆盖.

证明　在引理 Ⅰ.41 的证明中只要更仔细地选取 B_i 的覆盖,就可以证明本引理. 事实上, $\forall p \in B_i$, 有坐标邻域 $V_{p,\alpha}$ 和坐标映照 $h_{p,\alpha}$, 使 $V_{p,\alpha} \subset \mathrm{Int}\, A_{i+2} \backslash A_{i-1} \cap W_\alpha$ 且 $h_{p,\alpha}(V_{p,\alpha}) = B^m(3)$,因此,可取有限个 $V_{p,\alpha}$,记为 $\{V_{n_i}^i\}$, 覆盖 B_i,并且,$O_{n_i}^i = (h_{n_i}^i)^{-1}(B^m(1))$ 仍然覆盖 B_i,以这样方式得到的光滑图册 $\{(V_i, h_i)\}$ 满足引理的要求.

证讫

引理 Ⅰ.43 设 a, b 是满足 $0 \leqslant a \leqslant b$ 的实数,则存在 C^∞ 函数 $\varphi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, 并且

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \| x \|^2 \leqslant a, \\ 0, & \| x \|^2 \geqslant b. \end{cases}$$

证明　设

$$f(r) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{r^2}}, & r > 0, \\ 0, & r \leqslant 0. \end{cases}$$

它是 C^∞ 函数(但不解析,它在点 0 的任何阶导数都为 0,但不恒等于 0).

令

$$g(r) = \frac{f(b-r)}{f(b-r) + f(r-a)}.$$

它也是 C^∞,并且

$$g(r) = \begin{cases} 1, & r \leqslant a, \\ 0, & r \leqslant b. \end{cases}$$

那么,定义

$$\varphi(x) = g(\|x\|^2),$$

这就是所要求的函数.

证迄

定义Ⅰ.44 在拓扑空间 X 上给出函数 f,则 f 的支集,记为 supp f,定义为

$$\mathrm{supp}\, f = \overline{\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}}.$$

定义Ⅰ.45 微分流形 M 上的单位分解是指满足下列条件的非负 C^k 类函数的集合 $\{f_i : M \to \mathbb{R},\ i \in I\}$:

(i) 集合族$\{\mathrm{supp}\, f_i\}$是 M 的局部有限覆盖;

(ii) $\mathrm{supp}\, f_i$ 是紧集; (Ⅰ.30)

(iii) $\sum_{i \in I} f_i(p) = 1,\ \forall p \in M.$

附注 注意到条件(i),在条件(iii)的和式中对任何固定的 p,只有有限个非零项.

定义Ⅰ.46 对 M 的一个开覆盖 $\mathscr{W} = \{W_\alpha\}$,如果$\{\mathrm{supp}\, f_i\}$是 $\mathscr{W}$ 的细分,那么,称单位分解$\{\mathrm{supp}\, f_i\}$是从属于覆盖 $\mathscr{W}$ 的.

定理Ⅰ.47 设 $\mathscr{W} = \{W_\alpha\}$ 是 C^k 类流形 M 上的一个开覆盖,那么,存在从属于 $\mathscr{W}$ 的 C^k 类单位分解$\{f_i\}$.

证明 对开覆盖 $\mathscr{W}$ 取引理Ⅰ.42 中的坐标图$\{(V_i, h_i)\}$. 根据引理Ⅰ.43 作 C^∞ 函数 $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,使 $f(\mathbb{R}^m) \subset [0, 1]$,并且

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \|x\| \leqslant \dfrac{3}{2}, \\ 0, & \|x\| \geqslant 2, \end{cases}$$

那么

$$g_i(p) = \begin{cases} fh_i(p), & p \in V_i, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

是 C^k 类非负函数. $\mathrm{supp}\, g_i \subset V_i \subset \overline{V}_i$ 为紧集.

而 $\forall p \in O_i,\ h_i(p) \in B^m(1),\ f \circ h_i(p) = 1$,即 $g_i(p) = 1$. 令

$$f_i = \frac{g_i}{\sum_{i=1}^{\infty} g_i}. \tag{Ⅰ.31}$$

首先，$\mathrm{supp}\, g_i \subset V_i$ 为局部有限，因此，(Ⅰ.31)式的分母中对每点 $p \in M$ 只有有限项非零，并且，O_i 覆盖 M. 这样，分母中至少有一项为 1. 这样(Ⅰ.31)式是有意义的. 因此，f_i 满足(Ⅰ.30)式的条件(iii)，每个 f_i 显然是非负的 C^k 函数，并且，$\mathrm{supp}\, f_i = \mathrm{supp}\, g_i$ 为紧集. 从而，我们就得到了从属于 $\mathscr{W}$ 的单位分解.

证讫

微分流形的定义是从一般拓扑空间出发的. 尽管它是欧氏空间的十分一般的推广，但是 H. Whitney(1936)证明了任一 m 维光滑流形都能嵌入到 $2m+1$ 维欧氏空间中作为子流形. 这个定理的证明运用映照的逼近定理，证明较复杂，有兴趣的见[25].

但如果流形是紧致的，不难利用本节的结果得到下列定理.

定理Ⅰ.48　*设 M 是紧致的 m 维微分流形，则对某正整数 n，存在嵌入 $f: M \to \mathbb{R}^n$，即 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的正则子流形.*

证明　对紧致流形 M，存在有限坐标图组成的坐标图册 $\{(V_i, h_i)\}$ $(i = 1, \cdots, k)$，且对每个 i，$h_i(V_i) = B^m(3)$，及 $O_i = h_i^{-1}(B^m(1))$ 仍然是 M 的覆盖. 由定理Ⅰ.47的证明可知，对每个 i，存在光滑函数 $g_i: M \to \mathbb{R}$，使 $g_i(M) \subset [0, 1]$，$O_i \subset \mathrm{supp}(g_i) \subset V_i$，并且，$g_i$ 在 O_i 上取值为 1. 令 $f: M \to \mathbb{R}^{mk+k}$ 为

$$f = (g_1 h_1, \cdots, g_k h_k, g_1, \cdots, g_k),$$

其中，$g_i h_i: M \to \mathbb{R}^m$ 定义为

$$g_i h_i(p) = \begin{cases} g_i h_i, & p \in V_i, \\ 0, & p \notin V_i. \end{cases}$$

首先，证明 f 是浸入. 事实上，$\forall p \in M$，存在 i_0，使 $p \in O_{i_0}$，那么，在 O_{i_0} 上 $g_{i_0}(p) = 1$，即 $g_{i_0} h_{i_0} = h_{i_0}$. 而它在 O_{i_0} 上是微分同胚，而 $\det h_{i_0 *} \neq 0$，因此，$\mathrm{rank}\, f = m$.

其次，$\forall p, q \in M$，若 $f(p) = f(q)$，不妨设 $p \in O_{i_0}$. 那么，$g_{i_0}(p) = 1$. 由于 $f(p) = f(q)$，故亦有 $g_{i_0}(q) = 1$，$q \in V_{i_0}$，从而有

$$h_{i_0}(p) = g_{i_0}(p) h_{i_0}(p) = g_{i_0}(q) h_{i_0}(q) = h_{i_0}(q).$$

但是，h_{i_0} 是单映照，故必有 $p = q$.

因此，f 是单浸入，而 M 是紧致的，因此对任何闭子集 $U \subset M$ 为紧集，$f(U)$ 是紧集因而为闭集. 所以，f^{-1} 是连续的而使 $f: M \to f(M)$ 是同胚. 所以，f 一定

是嵌入.

证迄

七、Frobenius 定理

在前面已经引进了切向量的概念. $\forall X \in T_pM$, 它可看成 $\mathscr{F}_U$ 上的满足条件(Ⅰ.12)式的线性泛函 L_X.

如果对 $\forall p \in M$, 对应一个切向量 X_p, 则称 X 是 M 上的切向量场. 对 $f \in C^\infty(M)$, 令

$$(Xf)(p) = L_{X_p} f,$$

它是 M 上的实函数.

定义 Ⅰ.49 设 X 是 M 上的切向量场. 若 $\forall f \in C^\infty(M)$, 仍有 $Xf \in C^\infty(M)$, 则称 X 是 M 上的光滑向量场.

由此可见光滑切向量场 X 是 $C^\infty(M)$ 到 $C^\infty(M)$ 的一个线性微分算子. 从前面的结果可见算子 X 有性质: $\forall f, g \in C^\infty(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$, 那么

(i) $X(af + bg) = a(Xf) + b(Xg)$ (线性);

(ii) $X(f \cdot g) = f \cdot X(g) + g \cdot X(f)$ (Leibniz 法则).

设 X 是 M 上的光滑切向量场, $U \subset M$ 是非空开子集, 那么, X 在 U 上的限制 $X|_U$ 是开子流形 U 上的光滑切向量场. 为此, 只须证明 $\forall f \in \mathscr{F}_U$, 仍有 $X|_U f \in \mathscr{F}_U$. 任取 $p \in U$, 存在邻域 $p \in V$, 使 $\overline{V}$ 紧致, 且 $\overline{V} \subset U$, 那么, 不难构造光滑函数 $g \in C^\infty(M)$, 使

$$g(p) = \begin{cases} 1, & p \in V, \\ 0, & p \in M \setminus U. \end{cases}$$

令

$$\tilde{f}(p) = \begin{cases} f(p)g(p), & p \in U, \\ 0, & p \in M \setminus U. \end{cases}$$

于是, $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ 且 $\tilde{f}|_V = f|_V$. 这样, $\forall q \in V$, 有

$$(X|_U f)(q) = X_q f = (X\tilde{f})(q).$$

X 是 M 上的光滑切向量场, 所以, $X\tilde{f} \in C^\infty(M)$, 因此, 函数 $X|_U f$ 在点 $p \in U$ 是光滑的, 即 $X|_U f$ 是 U 上的光滑函数.

命题 Ⅰ.50 微分流形 M 上的切向量场 X 是光滑切向量场的充要条件是: $\forall p \in M$, 存在 p 的局部坐标系 (U, u^i), 使 $X|_U$ 可表示为

$$X|_U = \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i},$$

其中，$\xi^i(1 \leqslant i \leqslant m)$ 是 U 上的光滑函数.

证明　充分性是显然的. 现证明必要性. X 是 M 上的光滑切向量场，所以，$X|_U$ 是开子流形 U 上的光滑切向量场. 切向量场 $X|_U$ 在自然基 $\left\{\frac{\partial}{\partial u^i}\right\}$ 下可表示成

$$X|_U = \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i},$$

因为坐标函数 u^i 是 U 上的光滑函数，所以

$$X|_U(u^i) = \xi^i$$

也是 U 上的光滑函数.

证迄

设 X 与 Y 是流形 M 上的两个光滑的切向量场，它们的 Poisson 括号积定义为

$$[X, Y] = XY - YX, \tag{Ⅰ.32}$$

即 $[X, Y]$ 是作用在 $C^\infty(M)$ 上的算子，$\forall f \in C^\infty(M)$，有

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

不难验证，$[X, Y]$ 是 $C^\infty(M)$ 上的线性算子，且满足条件（Ⅰ.12）式，$\forall f, g \in C^\infty(M)$，有

$$[X, Y](fg) = f \cdot [X, Y]g + g \cdot [X, Y]f.$$

因此，$[X, Y]$ 是 M 上的光滑切向量场. 我们还可用局部坐标表示 $[X, Y]$.

设 (U, u^i) 是流形 M 上的一个局部坐标系，设

$$X|_U = \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \qquad Y|_U = \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \tag{Ⅰ.33}$$

其中，ξ^i，η^i 是 U 上的光滑函数. 由于 $\left[\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right] = 0$，因此 $\forall f \in \mathscr{F}_U$，有

$$\begin{aligned}[X, Y]|_U f &= X|_U Y|_U f - Y|_U X|_U f \\ &= X|_U \eta^i \frac{\partial f}{\partial u^i} - Y|_U \xi^i \frac{\partial f}{\partial u^i}\end{aligned}$$

$$= \xi^j \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\eta^i \frac{\partial f}{\partial u^i}\right) - \eta^j \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\xi^i \frac{\partial f}{\partial u^i}\right)$$
$$= \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial u^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial u^j}\right)\frac{\partial}{\partial u^i} f,$$

因此

$$[X, Y]|_U = \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial u^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial u^j}\right)\frac{\partial}{\partial u^i}. \qquad (\text{I}.34)$$

流形 M 上的光滑切向量场的 Poisson 括号满足下列运算规律,它的证明可从定义出发直接验证.

命题 I.51 设 X, Y, Z 是微分流形 M 上的光滑切向量场, f, $g \in C^\infty(M)$, 那么

$$\begin{aligned}
&\text{(i) } [X, Y] = -[Y, X];\\
&\text{(ii) } [X+Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z];\\
&\text{(iii) } [fX, gY] = f(Xg)Y - g(Yf)X + f\cdot g[X, Y];\\
&\text{(iv) } [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.
\end{aligned} \qquad (\text{I}.35)$$

微分流形上的光滑向量场全体,显然构成线性空间,我们又引入了 Poisson 括号的运算. 命题 I.51 告诉我们,微分流形上的光滑向量场全体构成李代数.

设 $f:M\to N$ 是光滑映照. 设 X 是 M 上的光滑向量场,Y 是 N 上的光滑向量场. 如果 $\forall p \in M$,使 $f_*(X_p) = Y_{f(p)}$, 那么,称 X 和 Y 是 f-相关的.

设 $g:N\to \mathbb{R}$ 是任一光滑函数,那么

$$Y_{f(p)}(g) = f_* X_p(g) = X_p(g\circ f),$$

即

$$Y(g)\circ f = X(g\circ f). \qquad (\text{I}.36)$$

反之,若 $\forall g:N\to\mathbb{R}$ 是光滑函数,使(I.35)式成立,则 X 和 Y 必 f-相关.

命题 I.52 设 $f:M\to N$ 是可微映照,如果 f 是满映照,那么,对 M 上的每个光滑向量场 X, N 上至多存在一个光滑向量场 Y,使 X 和 Y 是 f-相关. 如果 f 是浸入,那么,对 N 上的每个光滑向量场 Y, M 上至多存在一个光滑向量场 X,使 X 和 Y 是 f-相关的. 对后一种情形,存在 X 的充要条件是,对任何 $p\in M$, $Y_{f(p)} \in f_*(T_pM)$.

证明 若 $f:M\to N$ 是满映照,对 M 上任何光滑向量场 X,若有 Y_1 和 Y_2 均和 X 是 f-相关的. 那么, $\forall q\in N$, $\exists p\in M$,使 $f(p) = q$, 并且

$$(Y_1)_q = f_* X_p = (Y_2)_q.$$

当 f 是单映射时，f_* 是单映射时，对任何 N 上的光滑向量场 Y，至多存在 M 上一个光滑向量场 X，使之 f-相关.

根据命题Ⅰ.7，$\forall p \in M$，存在 p 在 M 中的坐标邻域(U, φ)和 $f(p)$在 N 中的邻域(V, ψ)，使 $f(U) \subset V$，并且

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(u^1, \cdots, u^m) = (u^1, \cdots, u^m, 0, \cdots, 0).$$

因此，有

$$f_* \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{f(p)}.$$

这样如果 $Y_{f(p)} \in f_*(T_pM)$，则

$$Y = \alpha^i \frac{\partial}{\partial y^i},$$

其中，α^i 是 V 中光滑函数. 于是，令

$$X = \beta^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

其中 $\beta^i = \alpha^i \circ f$ 是 U 中的光滑函数. 这就完成了命题的证明.

证迄

命题Ⅰ.53　如果 X_i 和 Y_i 是 f-相关的，$i = 1, 2$，那么，$[X_1, X_2]$和$[Y_1, Y_2]$是 f-相关的.

证明　设 $g: N \to \mathbb{R}$ 是光滑函数. 那么，从(Ⅰ.35)式可得

$$(Y_i g) \circ f = X_i(g \circ f), \ i = 1, 2.$$

所以有

$$\begin{aligned}([Y_1, Y_2]g) \circ f &= \{Y_1(Y_2 g)\} \circ f - \{Y_2(Y_1 g)\} \circ f \\ &= X_1([Y_2 g] \circ f) - X_2([Y_1 g] \circ f) \\ &= X_1(X_2(g \circ f)) - X_2(X_1(g \circ f)) \\ &= [X_1, X_2](g \circ f).\end{aligned}$$

证迄

定义Ⅰ.54　设 X 是流形 M 上的光滑向量场. 若在 $p \in M$，$X_p = 0$，则称点 p 是切向量场 X 的一个奇点.

向量场 X 在奇点 p 附近的性质是十分复杂的. 奇点的情况与流形的拓扑性

质密切相关.光滑的向量场在非奇点附近的性状却很简单,有下列结果.

命题 Ⅰ.55 设 X 是流形 M 上的光滑切向量场.若在点 $p\in M$ 处,$X_p\neq 0$,则存在点 p 的一个局部坐标系(W, w^i),使

$$X|_W=\frac{\partial}{\partial w^1}. \tag{Ⅰ.37}$$

证明 由命题Ⅰ.52可知,存在点 p 的局部坐标系 (U, u^i), $u^i(p)=0$, 使 X 限制在 U 上可表示为

$$X|_U=\xi^i\frac{\partial}{\partial u^i},$$

其中,ξ^i 是 U 上的光滑函数.因为 $X_p\neq 0$, 所以不妨设 $\xi^1(p)\neq 0$, 由 ξ^1 的连续性,不妨设在 U 中 $\xi^1\neq 0$. 考虑常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}u^1}=\frac{\xi^\alpha(u^1, \cdots, u^m)}{\xi^1(u^1, \cdots, u^m)}, \qquad 2\leqslant\alpha\leqslant m, \tag{Ⅰ.38}$$

其中,u^1 是自变量,而 u^α 是未知函数.根据常微分方程理论可知,存在 $\delta>0$,使 $\{(u^1, \cdots, u^m), |u^i|<\delta\}\subset U$, 并且,对任意给定的初始条件 $(v^2, \cdots, v^m)$, $|v^\alpha|<\delta$, 方程组(Ⅰ.37)有唯一解

$$u^\alpha=\varphi^\alpha(u^1; v^2, \cdots, v^m), -\delta<u^1<\delta, \tag{Ⅰ.39}$$

满足条件

$$\varphi^\alpha(0; v^2, \cdots, v^m)=v^\alpha. \tag{Ⅰ.40}$$

作变量变换

$$\begin{cases}u^1=v^1,\\ u^\alpha=\varphi^\alpha(v^1; v^2, \cdots, v^m),\end{cases}$$

则它的 Jacobi 行列式为

$$\left.\frac{\partial(u^1, \cdots, u^m)}{\partial(v^1, \cdots, v^m)}\right|_{v^1=0}=1.$$

所以,存在点 p 的一个邻域 $W\subset U$, 以 v^i 为局部坐标系,在此坐标系下,有

$$\begin{aligned}X|_W&=\xi^i\frac{\partial}{\partial u^i}=\xi^1\frac{\partial}{\partial u^1}+\xi^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\\&=\xi^1\left(\frac{\partial}{\partial u^1}+\frac{\partial u^\alpha}{v^1}\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)=\xi^1\frac{\partial}{\partial v^1}.\end{aligned}$$

再作变换

$$\begin{cases} w^1 = \int_0^{v^1} \frac{\mathrm{d}v^1}{\xi^1}, \\ w\alpha = v^\alpha, \end{cases}$$

则 w^i 是局部坐标系,并且使

$$X|_W = \frac{\partial}{\partial w^1}.$$

证迄

现在我们来考虑一般的情形.

设 $p \in M$ 是任一点,如果它对应于 T_pM 中的一个 h 维子空间 $L^h(p)$,即 L^h 是 M 上 h 维切子空间场. 对每一点 $p \in M$, 在 p 的一个邻域 U 上存在 h 个处处线性无关的光滑向量场 $X_1, \cdots, X_h$, 使 $\forall q \in U$, $L^h(q)$ 是由向量 $X_1(q), \cdots, X_h(q)$ 张成的,则称 L^h 是光滑的 h 维切子空间场,或称 L^h 是流形 M 上光滑的 h 维分布. 记

$$L^h|_U = \{X_1, \cdots, X_h\}.$$

切向量场 $X_1, \cdots, X_h$ 被 L^h 确定到差一个以函数为系数的非退化线性变换. 事实上,如果令

$$Y_\alpha = a_\alpha^\beta X_\beta,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant h,$$

其中,a_α^β 是 U 上的光滑函数,并且, $\det(a_\alpha^\beta)|_U \neq 0$, 则 $L^h|_U$ 也由 $Y_1, \cdots, Y_h$ 所张成.

问题是:对于流形 M 上给定的 h 维分布 L^h,是否存在局部坐标系(W, w^i),使

$$L^h|_W = \left\{\frac{\partial}{\partial w^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial w^h}\right\}. \tag{Ⅰ.41}$$

当(Ⅰ.40)式成立时,切向量场 X_α 可表示成

$$X_\alpha = a_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial w^\beta}.$$

由于 $\left[\frac{\partial}{\partial w^\alpha}, \frac{\partial}{\partial w^\beta}\right] = 0$, 因此

$$[X_\alpha, X_\beta] = c_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma, \tag{Ⅰ.42}$$

其中

$$c_{\alpha\beta}^{\gamma} = \left(a_{\alpha}^{\delta}\frac{\partial a_{\beta}^{\tau}}{\partial w^{\delta}} - a_{\beta}^{\delta}\frac{\partial a_{\alpha}^{\tau}}{\partial w^{\delta}}\right)(a_{\tau}^{\gamma})^{-1}. \qquad (\text{I}.43)$$

显然,如果切向量场 $Y_1, \cdots, Y_h$ 张成同一个 h 维分布 L^h,那么,当 X_α 满足条件(Ⅰ.41)时,$[Y_\alpha, Y_\beta]$ 也可表示为 Y_γ 的函数系数的线性组合.

定义Ⅰ.56 设 L^h 是微分流形 M 上的 h 维光滑分布.如果在任意一个坐标邻域 U 上,当 L^h 由处处线性无关的光滑切向量场 $X_1, \cdots, X_h$ 张成时,$[X_\alpha, X_\beta]$ 都可表示成 X_γ 的函数系数的线性组合,那么,分布 L^h 称为完全可积的.

定理Ⅰ.57(Frobenius 定理) 设 L^h 是定义在 M 的一个开集 U 上的 h 维光滑分布,那么,对任何 $p \in U$,存在 p 的局部坐标系 (W, w^i),$W \subset U$,使得

$$L^h|_W = \left\{\frac{\partial}{\partial w^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial w^h}\right\}$$

的充要条件是 L^h 是完全可积的.

证明 必要性在前面已证明.为证明充分性,我们对分布的维数 h 作归纳法.

当 $h=1$ 时,根据命题Ⅰ.55 知本定理成立.现设充分性对于 $h-1$ 维分布成立.设分布 L^h 由 U 上处处线性无关的切向量场 $X_1, \cdots, X_h$ 张成,并且

$$[X_\alpha, X_\beta] = 0 \mod X_\gamma.$$

根据命题Ⅰ.55,在点 p 存在坐标系 $(y^1, \cdots, y^m)$,使

$$X_h = \frac{\partial}{\partial w^h}. \qquad (\text{I}.44)$$

设

$$X'_h = X_\lambda - (X_\lambda y^h)X_h, \ 1 \leqslant \lambda, \mu, \nu \leqslant h-1. \qquad (\text{I}.45)$$

从(Ⅰ.43)式和(Ⅰ.44)式显然有

$$X'_\lambda y^h = 0, \ X_h y^h = 1, \qquad (\text{I}.46)$$

并且 $\{X'_\lambda, X_h\}$ 点点线性独立,张成 L^h,因此,它们仍然适合完全可积条件.我们有

$$[X'_\lambda, X'_\mu] = a_{\lambda\mu}X_h \mod X'_\nu.$$

将上式两边的算子同作用于函数 y^h,得到 $a_{\lambda\mu}=0$.因此,$h-1$ 维分布 $L'^{h-1} = \{X'_1, \cdots, X'_{h-1}\}$ 是完全可积的.根据归纳法假设,存在点 p 的局部坐标系

$(z^1, \cdots, z^m)$,使得

$$L'^{h-1} = \left\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^{h-1}}\right\}.$$

由于$\frac{\partial}{\partial z^\lambda}$和$X'_\mu$只差一个非奇异线性变换,因此从(Ⅰ.45)式得

$$\frac{\partial}{\partial z^\lambda} y^h = 0.$$

这样

$$L^h = \left\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^{h-1}}, X_h\right\}.$$

由完全可积条件

$$\left[\frac{\partial}{\partial z^\lambda}, X_h\right] = b_\lambda X_h \bmod \frac{\partial}{\partial z^\mu},$$

两边同作用于函数 y^h,则得 $b_\lambda = 0$, 所以有

$$\left[\frac{\partial}{\partial z^\lambda}, X_h\right] = c_\lambda^\mu \frac{\partial}{\partial z^\mu}. \tag{Ⅰ.47}$$

在$(z^1, \cdots, z^m)$坐标系下,可设

$$X_h = \xi^i \frac{\partial}{\partial z^i},$$

那么

$$\left[\frac{\partial}{\partial z^\lambda}, X_h\right] = \frac{\partial \xi^i}{\partial z^\lambda} \frac{\partial}{\partial z^i}. \tag{Ⅰ.48}$$

将(Ⅰ.46)式和(Ⅰ.47)式对照可得

$$\frac{\partial \xi^\rho}{\partial z^\lambda} = 0,\ 1 \leqslant \lambda \leqslant h-1,\ h \leqslant \rho \leqslant m. \tag{Ⅰ.49}$$

它说明 ξ^ρ 是 $z^h, \cdots, z^m$ 的函数. 令

$$X'_h = \xi^\rho \frac{\partial}{\partial z^\rho},$$

那么

$$L^h = \left\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^{h-1}}, X'_h\right\}.$$

根据命题Ⅰ.30,存在$(z^1, \cdots, z^m)$到$(w^1, \cdots, w^m)$的局部坐标变换,使

$$X'_h = \frac{\partial}{\partial w^h}.$$

上面的变换不涉及$z^1, \cdots, z^{h-1}$.再令$w^\lambda = z^\lambda$,那么,$(w^1, \cdots, w^m)$成为点p的局部坐标系,在此坐标系下有

$$L^h = \left\{\frac{\partial}{\partial w^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial w^h}\right\}.$$

证迄

定义Ⅰ.58 设L^h是微分流形M上的一个h维光滑分布,$f:M' \to M$是M的浸入子流形,$\forall q \in M'$,若有

$$f_*(T_qM') \subset L^h,$$

那么,称M'是分布L^h的积分流形.

显然,L^h的积分流形至多是h维的.

根据 Frobenius 定理可知,L^h如果是M上的完全可积分布,那么,$\forall p \in M$,存在p在M中的坐标邻域(W, w^i),使在W中$w^{h+1} = \text{const}, \cdots, w^n = \text{const}$所给出的所有子流形都是$M$的积分流形,并且都是$h$维的.

Frobenius 定理是局部的定理,可以证明下列整体定理(定理Ⅰ.59).

定理Ⅰ.59 设L^h是微分流形M中的完全可积的分布,那么,过$\forall p \in M$,有一个极大连通积分流形K_p,使过p的任何其他连通积分流形都是K_p的子流形.

定理Ⅰ.59的证明见[25]或[24]的第一卷.

Ⅱ. 外微分和积分

一、张量丛

设M是m维微分流形,$p \in M$是任意一点,则T_pM表示点p的切空间,它是m维的向量空间,它的对偶空间是T_p^*M.这样,在点p有(r, s)型张量空间

$$T_s^r(p) = \underbrace{T_pM \otimes \cdots \otimes T_pM}_{r\text{个}} \otimes \underbrace{T_p^*M \otimes \cdots \otimes T_p^*M}_{s\text{个}}. \qquad (\text{Ⅱ}.1)$$

当点 p 在 M 上变化时,得到一系列的张量空间.为了将流形上光滑向量场的概念推广到张量场,我们考虑这种张量空间全体所组成的新的微分流形.

设 V 是 $\mathbb{R}$ 上的 m 维向量空间,用 $GL(V)$ 表示 V 上的线性自同构群.在 V 上取一组基 $\{e_1, \cdots, e_m\}$,则 V 等同于 $\mathbb{R}^m$,我们把 V 的元素 y 记成坐标行

$$y = (y^1, \cdots, y^m). \qquad (\text{Ⅱ}.2)$$

这样,$GL(V)$ 就是一般线性群 $GL(m, \mathbb{R})$.群 $GL(V)$ 在向量空间 V 上的作用记成右作用,用矩阵表示为

$$y \cdot a = (y^1, \cdots, y^m)\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^m \end{pmatrix}, \qquad (\text{Ⅱ}.3)$$

其中,$\det a = \det(a_i^j) \neq 0$.

V_s^r 表示 V 上的 (r, s) 型张量空间,它的基为

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*j_1} \otimes \cdots \otimes e^{*j_s},\ 1 \leqslant i_\alpha,\ j_\beta \leqslant m. \qquad (\text{Ⅱ}.4)$$

这样,V_s^r 中的元素可以用分量表示.如果给基(Ⅱ.4)的元素以一定的次序,就可把 V_s^r 中的元素记成如(Ⅱ.2)式的坐标行.

令

$$T_s^r(M) = \bigcup_{p\in M} T_s^r(p). \qquad (\text{Ⅱ}.5)$$

我们要在 $T_s^r(M)$ 中引进微分结构,使之称为微分流形,并且它局部微分同胚于乘积流形.我们称 $T_s^r(M)$ 为流形 M 上的 (r, s) 张量丛.

取流形 M 的一个坐标邻域 U,局部坐标是 $(u^1, \cdots, u^m)$.这样,在任一点 $p \in U$,T_pM 和 T_p^*M 分别有彼此对偶的自然基 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right)_p\right\}$ 和 $\{(\mathrm{d}u^1)_p, \cdots, (\mathrm{d}u^m)_p\}$.因此,$T_s^r(M)$ 有基

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}\right)_p \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial u^{i_r}}\right)_p \otimes (\mathrm{d}u^{j_1})_p \otimes \cdots \otimes (\mathrm{d}u^{j_s})_p,\ 1 \leqslant i_\alpha,\ j_\beta \leqslant m. \qquad (\text{Ⅱ}.6)$$

这样,我们可以定义映照

$$\varphi_U: T_s^r(U) \to U \times V_s^r, \qquad (\text{Ⅱ}.7)$$

使对任意 $p\in U$, φ_U 将$\bar{y}$映照到(p, y),使$\bar{y}$在基(Ⅱ.6)下的分量与 y 在基(Ⅱ.4)下的分量相同.显然,φ_U 是 1-1 映照.

取流形 M 的可列坐标覆盖$\{U_1, U_2\cdots\}$,那么,由(Ⅱ.7)式定义的相应映照是$\{\varphi_1, \varphi_2\cdots\}$,而 $\varphi_i(T^r_s(U_i))=U_i\times V^r_s=\widetilde{U}_i$,它是 M 的开子流形和向量空间 V^r_s 的乘积,当然是微分流形.$\widetilde{U}_i$ 的任一开子集 V,在 φ_i 下的原像取作 $T^r_s(M)$中的开集,那么,所有这些开集的和集构成 $T^r_s(M)$中的拓扑结构.

事实上,当 $U_i\cap U_j\neq\varnothing$ 时,显然有

$$T^r_s(U_i)\cap T^r_s(U_j)=T^r_s(U_i\cap U_j), \tag{Ⅱ.8}$$

那么,$\varphi_i(T^r_s(U_i)\cap V^r_s(U_j))$是$\widetilde{U}_i$中的开集.这样,$\forall$ 开集$V\subset\widetilde{U}_i$, $\varphi_i^{-1}(V)$的全体就构成 $T^r_s(M)$ 中的拓扑基.而每个 V 可由微分流形$\widetilde{U}_i$ 的可列基 $V_{i\alpha}$ 表示.这样,$T^r_s(M)$ 是具有可列基$\{\varphi_i^{-1}(V_{i\alpha})\}$ 的拓扑空间.如此构造的 $T^r_s(M)$ 的拓扑结构使 φ_i 是连续映照,$T^r_s(U_i)$ 为 $T^r_s(M)$ 的开集.$\forall$ $\bar{p}$, $\bar{q}\in T^r_s(M)$,如果存在$\bar{p}\in T^r_s(U_i)$, $\bar{q}\in T^r_s(U_j)$ 而 $T^r_s(U_i)\cap T^r_s(U_j)=\varnothing$,则取 $T^r_s(U_i)$ 和 $T^r_s(U_j)$ 分别为 $\bar{p}$, $\bar{q}$ 的可分离邻域,否则存在 $x\in U_i$ 使$\bar{p}$, $\bar{q}\in T^r_s(x)$,但 $\varphi_i(\bar{p})\neq\varphi_i(\bar{q})$.取分离邻域 $V_{\bar{p}}$和 $V_{\bar{q}}$,这样,$\varphi_i^{-1}(V_{\bar{p}})$和 $\varphi_i^{-1}(V_{\bar{q}})$就是$\bar{p}$和$\bar{q}$的可分离邻域,从而证明了 $T^r_s(M)$为具可列基的 Hausdorff 空间.

由于(Ⅱ.8)式,$T^r_s(U_i)$中的任一开集必为$\widetilde{U}_i$ 中开集在 φ_i 下的原像,因此,φ_i 为开映照即 φ_i 是同胚映照.

固定 $p\in U$,则可定义 $\varphi^{-1}_{U,p}:V^r_s\to T^r_s(p)$,使

$$\varphi^{-1}_{U,p}(y)=\varphi^{-1}_U(p, y).$$

由 φ_U 的定义,$\varphi^{-1}_{U,p}$是向量空间 V^r_s 和 $T^r_s(p)$的线性同构.

若 W 是 M 的另一包含 p 的坐标邻域,局部坐标为 $w^1, \cdots, w^m$.设

$$g_{UW}(p)=\varphi_{W,p}\circ\varphi^{-1}_{U,p}:V^r_s\to V^r_s, \tag{Ⅱ.9}$$

那么,$g_{UW}(p)$是向量空间 V^r_s 上的自同构, $g_{UW}(p)\in GL(V^r_s)$.对 y, $y'\in V^r_s$,使

$$\varphi^{-1}_U(p, y)=\varphi^{-1}_W(p, y') \tag{Ⅱ.10}$$

成立的充要条件为

$$y'=y\cdot g_{UW}(p). \tag{Ⅱ.11}$$

对 M 的任意两个坐标邻域 U, W,如果 $U\cap W\neq\varnothing$,则由(Ⅱ.9)式定义的映照

$$g_{UW}:U\cap W\to GL(V^r_s)$$

是光滑的. 为方便起见,就 $r = s = 1$ 的情况来说明. 设 $y \cdot y' \in V'_1$, 则

$$y = y^i_j e_i \otimes e^{*j}, \quad y' = y'^i_j e_i \otimes e^{*j}.$$

于是

$$\begin{cases} \varphi_U^{-1}(p, y) = y^i_j \left(\dfrac{\partial}{\partial u^i}\right)_p \otimes (\mathrm{d}u^j)_p, \\ \varphi_W^{-1}(p, y') = y'^i_j \left(\dfrac{\partial}{\partial w^i}\right)_p \otimes (\mathrm{d}w^j)_p. \end{cases} \tag{Ⅱ.12}$$

在 $U \cap W$ 上,自然基之间有关系

$$\begin{cases} \mathrm{d}u^i = \dfrac{\partial u^i}{\partial w^j}\mathrm{d}w^j, \\ \dfrac{\partial}{\partial u^i} = \dfrac{\partial w^j}{\partial u^i}\dfrac{\partial}{\partial w^j}. \end{cases} \tag{Ⅱ.13}$$

从(Ⅱ.10)式、(Ⅱ.12)式和(Ⅱ.13)式得

$$y'^i_j = y^k_l \left(\frac{\partial w^i}{\partial u^k}\right)_p \left(\frac{\partial u^l}{\partial w^j}\right)_p. \tag{Ⅱ.14}$$

设 $J_{UW} = \left(\dfrac{\partial w^i}{\partial u^j}\right)$ 的坐标变换的 Jacobi 矩阵,那么

$$g_{UW} = J_{UW} \otimes J_{UW}^{-1}, \tag{Ⅱ.15}$$

因为 J_{UW} 是 $U \cap W$ 上光滑函数组成的非奇异矩阵. 显然对一般(r, s)型张量丛,有

$$g_{UW} = \underbrace{J_{UW} \otimes \cdots \otimes J_{UW}}_{r} \otimes \underbrace{J_{UW}^{-1} \otimes \cdots \otimes J_{UW}^{-1}}_{s}. \tag{Ⅱ.16}$$

对覆盖流形 M 的任意两个坐标邻域 U_i 和 U_j,如果 $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, 那么,可定义映照

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} = (id, g_{U_iU_j}):((U_i \cap U_j)|_i, V^r_s) \to ((U_i \cap U_j)|_j, V^r_s). \tag{Ⅱ.17}$$

它显然是 $\varphi_i(T^r_s(U_i) \cap T^r_s(U_j))$ 到 $U_j \times T^r_s$ 中的微分同胚. 这样,在 $T^r_s(M)$上存在唯一的微分结构,使 φ_i 是微分同胚. 这就说明了 $T^r_s(M)$是局部等价于乘积流形的微分流形. 有自然投影

$$\pi: T^r_s(M) \to M. \tag{Ⅱ.18}$$

它将 $T_s^r(p)$ 中的元素映照到 $p \in M$，它是光滑的满映照. π 称为丛投影，$T_s^r(p)$ 称为在点 p 的纤维.

当 $r = 1,\ s = 0$ 时，我们得到流形 M 上的切丛，记成 TM. 当 $r = 0,\ s = 1$ 时，得到流形 M 上的余切丛，记为 $T^* M$. 按张量丛的作法，可以类似地构造 M 上的外向量丛和外形式丛，分别记作

$$\begin{aligned} \wedge^r(M) &= \bigcup_{p\in M} \wedge^r T_p M, \\ \wedge^r(M^*) &= \bigcup_{p\in M} \wedge^r T_p^* M. \end{aligned} \tag{Ⅱ.19}$$

记 $f: M \to T_s^r(M)$ 是光滑映照，如果满足

$$\pi \circ f = id : M \to M,$$

即 $\forall p \in M,\ f(p) \in T_s^r(M)$，那么，称 f 是张量丛 $T_s^r(M)$ 的一个光滑截面，或称为 M 上的 $(r,\ s)$ 型张量场. 特别地，切丛的截面就是 M 上的光滑切向量场，余切丛的截面就是 M 上的一次微分形式. 外形式丛 $\wedge^r(M^*)$ 的光滑截面称为 M 上的光滑的 r 次外微分形式.

二、外微分

设 M 是 m 维微分流形，用 $A^r(M)$ 记 r 次外形式丛 $\wedge^r(M)$ 的光滑截面所成的空间，即

$$A^r(M) = \Gamma(\wedge^r(M)).$$

它的元素，称为 M 上的 r 次外微分形式.

类似于构造张量丛，我们可以构造外形式丛

$$A(M^*) = \bigcup_{p\in M} \wedge\ (T_p^* M).$$

它的光滑截面全体记为 $A(M)$，其元素称为外微分形式. 显然有

$$A(M) = \sum_{r=0}^{m} A^r(M), \tag{Ⅱ.20}$$

即每一个外微分形式 ω 可以写成

$$\omega = \omega^0 + \omega^1 + \cdots + \omega^m,$$

其中，ω^i 是 i 次外微分形式. 外形式的加法、数乘及外积运算可以推广到外微分形式空间 $A(M)$. 设 $\omega_1,\ \omega_2 \in A(M)$，那么，$\forall p \in M$，有

$$\omega_1 \wedge \omega_2(p) \overset{\text{def}}{=} \omega_1(p) \wedge \omega_2(p). \tag{Ⅱ.21}$$

外积∧给出了映照

$$\wedge : A^r(M) \times A^s(M) \to A^{r+s}(M). \qquad (\text{Ⅱ}.22)$$

当 $r+s>m$ 时,令 $A^{r+s}(M)=0$.

在局部坐标 $u^1, \cdots, u^m$ 下,r 次外微分形式 ω 在坐标邻域 U 上可表示为

$$\omega = a_{i_1\cdots i_r} du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r}, \qquad (\text{Ⅱ}.23)$$

其中,$a_{i_1\cdots i_r}$ 是 U 上的光滑函数,且关于下标是反称的.

r 次外向量丛 $\wedge^r(M)$ 和 r 次外形式丛 $\wedge^r(M^*)$ 是对偶的,它们在同一点纤维之间的配合是从 $\wedge^r(V)$ 和 $\wedge^r(V^*)$ 的配合诱导来的(这里,V 和 V^* 是对偶向量空间). 我们有对偶基 $\left\{\frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial u^{i_r}}\right\}$ 和 $\{du^{j_1} \wedge \cdots \wedge du^{j_r}\}$,即

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial u^{i_r}}, du^{j_1} \wedge \cdots \wedge du^{j_r} \right\rangle = \delta_{i_1\cdots i_r}^{j_1\cdots j_r}. \qquad (\text{Ⅱ}.24)$$

所以,从(Ⅱ.23)式和(Ⅱ.24)式可得

$$a_{i_1\cdots i_r} = \frac{1}{r!}\left\langle \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial u^{i_r}}, \omega \right\rangle. \qquad (\text{Ⅱ}.25)$$

我们可在 $A(M)$ 上引进重要的微分算子 d,它称为外微分算子.

定理Ⅱ.1　*设 M 是 m 维光滑流形,则存在唯一的一个映照 $d: A(M) \to A(M)$,使 $d(A^r(M)) \subset A^{r+1}(M)$,并且满足下列条件:*

(i) 对任意 $\omega_1, \omega_2 \in A(M)$,有 $d(\omega_1+\omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$;

(ii) 设 ω_1 是 r 次外微分形式,则

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2;$$

(iii) 如果 f 是 M 上的光滑函数,那么,df 恰是 f 的微分;

(iv) 如果 $f \in A^0(M)$,那么,$d(df)=0$.

证明　(1) 首先证明外微分算子的局部性. 设 $\omega \in A(M)$, 对任何开集 $U \subset M$, 如果 $\omega|_U = 0$,那么,$d\omega|_U = 0$. 事实上,对任何 $p \in M$,存在 p 的开邻域 W,使 $p \in W \subset \overline{W} \subset U$, 且存在 M 上的光滑函数 h,使

$$h(p') = \begin{cases} 1, & p' \in W, \\ 0, & p' \notin U. \end{cases}$$

这样, $h\omega \in A(M)$,并且 $h\omega \equiv 0$. 而

$$dh \wedge \omega + h d\omega = 0.$$

将它限制在 W 内,得

$$d\omega|_W = 0,$$

因此, $d\omega|_p = 0$, 而 p 在 U 中是任意的. 这就证明了断言.

据此,根据性质(i)可得 $\forall \omega_1, \omega_2 \in A(M)$, 如果

$$\omega_1|_U = \omega_2|_U,$$

则

$$(d\omega_1)|_U = (d\omega_2)|_U.$$

(2) 外微分算子在局部坐标邻域内的唯一性. 设 U 是 M 的任一坐标邻域, 坐标为$(u^1, \cdots, u^m)$. 对任一 ω 可表示为

$$a du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r}$$

的常系数的线性组合. 那么,由条件(ii),(iii),(iv)得

$$d\omega = da \wedge du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r}, \qquad (\text{II}.26)$$

其中,da 为函数 a 的微分. 因此,算子 d 在 U 中有唯一确定的形式.

(3) 设$\{U_i\}$是一个坐标邻域的开覆盖. 如果在任一坐标邻域中存在唯一的外微分算子,那么从(1)可得在 M 上存在唯一的外微分算子. 事实上, $\forall U_i, U_j$, $U_i \cap U_j \neq \varnothing$,那么,$\forall \omega \in A(M)$, 有

$$(d\omega|_{U_i})_{U_i\cap U_j} = d\omega|_{U_i\cap U_j} = (d\omega|_{U_j})_{U_i\cap U_j}.$$

(4) 设 U 是 M 的任一坐标邻域,那么

$$\omega|_U = a_{i_1\cdots i_r} du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r}. \qquad (\text{II}.27)$$

定义

$$d\omega|_U = da_{i_1\cdots i_r} \wedge du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r}. \qquad (\text{II}.28)$$

它显然是 U 上的 $r+1$ 次外微分形式,并且满足条件(i)和(iii). 条件(iv)是二阶偏导数可交换次序性质的推论. 最后来验证条件(ii). 因为(Ⅱ.28)式的定义及外积均是线性的,只要对两个单项式验证即可. 设

$$\omega_1 = f du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r},$$
$$\omega_2 = g du^{j_1} \wedge \cdots \wedge du^{j_s},$$

则

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d(fg) du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r} \wedge du^{j_1} \wedge \cdots \wedge du^{j_s}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_r} \wedge g\mathrm{d}u^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{j_s} \\
&\quad + f\mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_r} \wedge \mathrm{d}u^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{j_s} \\
&= \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_r} \wedge g\mathrm{d}u^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{j_s} \\
&\quad + (-1)^r f \wedge \mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_r} \wedge \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}u^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{j_s} \\
&= \mathrm{d}\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge \mathrm{d}\omega_2.
\end{aligned}
$$

证迄

定理Ⅱ.2(Poincaré 引理)　设 $\omega \in A(M)$，则

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0. \tag{Ⅱ.29}$$

证明　因 d 是线性算子,只要取单项式即可. 又由于 d 的局部性,因此只要在每个坐标邻域中验证即可. 设

$$\omega = f\mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_r}, \tag{Ⅱ.30}$$

则

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_r}.$$

从外微分算子满足的条件(ii)和(iv)即得

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\mathrm{d}f) \wedge \mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_r} - \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}(\mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_r}) = 0.$$

证迄

设 $f:M \to N$ 是光滑映照,那么,f 在每点 $p \in M$ 诱导出切映照 $f_*: T_pM \to T_{f(p)}N$. 它还诱导出外微分形式空间之间的线性映照 $f^*: A(N) \to A(M)$ 如下:如果,$\eta \in A^0(N)$,则令

$$f^*\eta = \eta \circ f \in A^0(M); \tag{Ⅱ.31}$$

如果,$\eta \in A^r(N)(r \geqslant 1)$,那么,对 M 上的任意 r 个光滑切向量场 $X_1, \cdots, X_r$,有

$$\langle X_1 \wedge \cdots \wedge X_r, f^*\eta\rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \langle f_*X_1 \wedge \cdots \wedge f_*X_r, \eta\rangle_{f(p)}, \ p \in M, \tag{Ⅱ.32}$$

其中,⟨,⟩是由(Ⅱ.24)式定义的配合.

我们知道 f^* 与外积是可以交换的. 事实上,它与外微分算子也可以交换.

命题Ⅱ.3　*设 $f:M \to N$ 是微分流形之间的光滑映照,则有*

$$f^* \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ f^*: A(N) \to A(M). \tag{Ⅱ.33}$$

证明　由于 f^* 和 d 都是线性的,因此我们只要对单项式证明,并且只要在

每点附近证明即可. 首先,假定 $\eta \in A^0(N)$, 并取 M 上的光滑向量场 X. 从(Ⅱ.32)式得

$$\langle X, f^* \mathrm{d}\eta \rangle = \langle f_* X, \mathrm{d}\eta \rangle = f_* X(\eta) = X(\eta \circ f) = \langle X, \mathrm{d}(f^* \eta) \rangle.$$

这说明(Ⅱ.33)式对函数是成立的. 设它对 $r = k-1$ 也成立. 令

$$\eta = a\mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_r},$$

那么

$$\begin{aligned}
\mathrm{d} \circ f^* \eta &= \mathrm{d}f^* (a\mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_r}) \\
&= \mathrm{d}(f^* (a\mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_r-1}) \wedge f^* \mathrm{d}u^{i_r}) \\
&= \mathrm{d} \circ f^* (a\mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_r-1}) \wedge f^* \mathrm{d}u^{i_r} \pm f^* (a\mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_r-1}) \\
&\quad \wedge \mathrm{d}(f^* \mathrm{d}u^{i_r}) \\
&= f^* \circ \mathrm{d}(a\mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_r-1}) \wedge f^* \mathrm{d}u^{i_r} \pm f^* (a\mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_r-1}) \\
&\quad \wedge \mathrm{dd}(u^{i_r} \circ f) \\
&= f^* (\mathrm{d}(a\mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_r-1}) \wedge \mathrm{d}u^{i_r}) \\
&= f^* \circ \mathrm{d}(a\mathrm{d}u^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{i_r}) = f^* \circ \mathrm{d}\eta.
\end{aligned}$$

这就证明了命题.

证迄

在前一节,我们证明了一个可微 r 维分布的 Frobenius 定理,它是用向量场语言描述的,也有它的对偶形式。首先我们有下述命题。

命题Ⅱ.4 **设 w 是微分流形 M 上的一次微分形式,X 和 Y 是 M 上的光滑向量场,那么**

$$\langle X \wedge Y, \mathrm{d}w \rangle = X\langle Y, w \rangle - Y\langle X, w \rangle - \langle [X, Y], w \rangle. \quad (\text{Ⅱ}.34)$$

证明 (Ⅱ.34)式两边是线性的,所以,不妨假定 w 是单项式,且可在每点附近的局部坐标领域内证明。不妨设

$$w = g\mathrm{d}f,$$

其中, f, g 都是光滑函数。这样

$$\mathrm{d}w = \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}f.$$

从配合公式得到

$$\langle X \wedge Y, \mathrm{d}w \rangle = \langle X \wedge Y, \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}f \rangle = \begin{vmatrix} \langle X, \mathrm{d}g \rangle & \langle X, \mathrm{d}f \rangle \\ \langle Y, \mathrm{d}g \rangle & \langle Y, \mathrm{d}f \rangle \end{vmatrix}$$

$$= Xg \cdot Yf - Xf \cdot Yg.$$

另一方面,有

$$\langle X, w\rangle = \langle X, g\mathrm{d}f\rangle = g \cdot Xf,$$
$$Y\langle X, w\rangle = Yg \cdot Xf + gY(Xf),$$
$$X\langle Y, w\rangle = Xg \cdot Yf + gX(Yf).$$

这样,(Ⅱ.34)式右端为

$$\begin{aligned} X\langle Y, w\rangle - Y\langle X, w\rangle - \langle [X, Y], w\rangle &= Xg \cdot Yf - Yg \cdot Xf + g[X, Y]f - \langle [X, Y], w\rangle \\ &= Xg \cdot Yf - Yg \cdot Xf. \end{aligned}$$

这就证明了(Ⅱ.34)式.

证迄

现在考虑流形 M 上的 h 维光滑分布 $L^h = \{X_1, \cdots, X_h\}$,它在任一点 p 附近由 h 个光滑的线性无关向量场张成.因此,可找到 $m-h$ 个光滑切向量场 $X_{h+1}, \cdots, X_m$,使 $\{X_1, \cdots, X_h, X_{h+1}, \cdots, X_m\}$ 在点 p 的邻域内处处线性无关.设 $\{\omega_1, \cdots, \omega_h, \omega_{h+1}, \cdots, \omega_m\}$ 是其对偶一次形式.因此,在局部,分布 L^h 等价于 Pfaff 方程组

$$\omega_\alpha = 0,\ h+1 \leqslant \alpha \leqslant m. \tag{Ⅱ.35}$$

从(Ⅱ.34)式得

$$\begin{aligned} \langle X_i \wedge X_j, \mathrm{d}\omega_\alpha\rangle &= X_i\langle X_j, \omega_\alpha\rangle - X_j\langle X_i, \omega_\alpha\rangle - \langle [X_i, X_j], \omega_\alpha\rangle \\ &= -\langle [X_i, X_j], \omega_\alpha\rangle, \end{aligned}$$

其中,$1 \leqslant i \leqslant h$.如果分布 L^h 是完全可积的,即

$$[X_i, X_j] \in L^h,$$

它等价于

$$\langle X_i \wedge X_j, \mathrm{d}\omega_\alpha\rangle = 0. \tag{Ⅱ.36}$$

我们来证明它等价于

$$\mathrm{d}\omega_\alpha \equiv 0 \quad \mathrm{mod}(\omega_{h+1}, \cdots, \omega_m). \tag{Ⅱ.37}$$

实际上,有

$$\mathrm{d}\omega_\alpha = \sum_{i,j} a_{\alpha ij}\omega_i \wedge \omega_j + \sum_{1\leqslant a\leqslant m} a_{\alpha a\beta}\omega_a \wedge \omega_\beta,$$
$$1 \leqslant i \leqslant h,\ h+1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant m,\ 1 \leqslant a \leqslant m,$$

其中，a_{ij} 关于 i，j 反称. 代入(Ⅱ.36)式得 $a_{\alpha ij}=0$. 因此

$$d\omega_\alpha = \sum a_{\alpha\alpha\beta}\omega_\alpha \wedge \omega_\beta. \qquad (\text{Ⅱ}.38)$$

(Ⅱ.37)式和(Ⅱ.38)式是一样的. 我们把满足条件(Ⅱ.37)的 Pfaff 方程组(Ⅱ.35)称为完全可积的. 因此，根据 Frobenius 定理，存在局部坐标系 u^i，使 L^h 由 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial u^i}\right\}$ 所张成，即使 Pfaff 方程组(Ⅱ.35)等价于

$$du^\alpha = 0.$$

我们可将 Frobenius 定理改成下列形式.

定理Ⅱ.5 Pfaff 方程组

$$\omega_\alpha = 0,\ h+1 \leqslant \alpha \leqslant m \qquad (\text{Ⅱ}.39)$$

为完全可积的充要条件是存在局部坐标系 $(u^i,\ u^\alpha)$，使 $u^\alpha=\text{const}$ 满足方程组.

三、外微分式的积分

为定义流形上的积分，先定义一些预备概念.

定义Ⅱ.6 设 M 是 m 维微分流形，称为可定向的，如果在 M 上存在一个连续的处处不为零的 m 次外微分形式. 如果在 M 上给定了这样一个外微分形式 ω，那么，称 M 是定向取定的.

因为 $\wedge^m(T_p^*M)$ 是一维空间，任何两个 m 次形式仅差一个可微函数. 这样，在一个连通可定向流形上恰存在两个定向. 一般，我们总讨论连通流形.

命题Ⅱ.7 微分流形 M 是可定向的充要条件是在 M 上存在一个坐标图集，使在任何两个相交坐标邻域中，坐标变换的 Jacobi 行列式都大于零. 这样的坐标图集称为关于定向的顺向坐标图集.

证明 如果 M 可定向，ω 是定义 M 定向的一个 m 次外微分形式. 如果，Ω 是另一个不为零的 m 形式，有 $\Omega=f\omega$，按照 $f>0$ 或 $f<0$ 说 $\Omega>0$ 或 $\Omega<0$.

如果 $(u^1,\ \cdots,\ u^m)$ 是坐标邻域 U 中的坐标，则 $du^1\wedge\cdots\wedge du^m\neq 0$. 我们有 $du^1\wedge\cdots\wedge du^m>0$ 或 $du^1\wedge\cdots\wedge du^m<0$. 如果发生后一种情形，以 $(-u^1,\ \cdots,\ u^m)$ 作为 U 中的坐标而化为前一种情形. 因此，当用坐标邻域系 $\{U,\ V,\ W,\ \cdots\}$ 覆盖 M 时，总可在每个坐标邻域中取坐标，使 $du^1\wedge\cdots\wedge du^m>0$ 及 $dw^1\wedge\cdots\wedge dw^m>0$. 如果 $U\cap W\neq\varnothing$，则有

$$du^1\wedge\cdots\wedge du^m = f dw^1\wedge\cdots\wedge dw^m = f\det\left(\frac{\partial w^i}{\partial u^j}\right)du^1\wedge\cdots\wedge du^m.$$

据此 $f > 0$ 且 $f\det\left(\frac{\partial w^i}{\partial u^j}\right) = 1$. 所以, $\det\left(\frac{\partial w^i}{\partial u^j}\right) > 0$.

反之,如果 M 上有可列个坐标邻域 U_i,使坐标变换的 Jacobi 行列式大于零. 记 U_i 中坐标为 $(u_i^1, \cdots, u_i^m)$,令 $\omega_i = \mathrm{d}u_i^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u_i^m \neq 0$. 又设 φ_i 为附属于 U_i 的单位分解. 令

$$\omega = \sum \varphi_i \omega_i,$$

那么,对任何 $p \in M$,从 $\sum \varphi_i(p) = 1$ 和 $\operatorname{supp} \varphi_i$ 的局部有限性,一定有有限个 $\varphi_{i_1}, \cdots, \varphi_{i_s}$ 在点 p 为正,则

$$\begin{aligned}\omega|_p &= \varphi_{i_1}\omega_{i_1} + \cdots + \varphi_{i_s}\omega_{i_s} = \left(\varphi_{i_1} + \det\left(\frac{\partial u_{i_2}^i}{\partial u_{i_1}^j}\right)\varphi_{i_2} + \cdots + \det\left(\frac{\partial u_{i_s}^i}{\partial u_{i_1}^j}\right)\varphi_{i_s}\right)\omega_{i_1}(p) \\ &= f(p)\omega_{i_1}(p) \neq 0.\end{aligned}$$

因此,可用 ω 来定义 M 的定向.

证讫

设 M 是 m 维定向微分流形,φ 是 M 上的 m 次外微分形式,并且,$\operatorname{supp} \varphi$ 是紧的. 任取 M 的一个顺向坐标覆盖 $\Sigma = \{U_i\}$. 设 $\{g_\alpha\}$ 是附属于 Σ 的单位分解,那么,

$$\varphi = \left(\sum_\alpha g_\alpha\right) \cdot \varphi = \sum_\alpha (g_\alpha \varphi). \tag{Ⅱ.40}$$

支集 $\operatorname{supp} g_\alpha\varphi \subset \operatorname{supp} g_\alpha$ 包含于某个坐标邻域 $U_i \in \Sigma$ 内,我们可以定义

$$\int_M g_\alpha \varphi \overset{\text{def}}{=} \int_{U_i} g_\alpha \varphi, \tag{Ⅱ.41}$$

其中,右端理解为普通的 Riemann 积分,即:如果 $g_\alpha\varphi$ 关于 U_i 中的坐标系 $u^1, \cdots, u^m$ 表示为

$$f(u^1, \cdots, u^m)\mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^m,$$

那么,(Ⅱ.41)式的积分就是

$$\int_{U_i} f(u^1, \cdots, u^m)\mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^m. \tag{Ⅱ.42}$$

首先要说明(Ⅱ.41)中的右端具有意义,即证明它与 U_i 的选择无关. 不妨设 $\operatorname{supp}(g_\alpha\varphi) \subset U_i \cap U_j$. 设它们的坐标系分别是 $(u^1, \cdots, u^m)$ 和 $(v^1, \cdots, v^m)$,那么

$$J = \det\left(\frac{\partial v^i}{\partial u^j}\right) > 0. \tag{Ⅱ.43}$$

如果 $g_\alpha\varphi$ 在 U_i 和 U_j 中的表达式分别是

$$g_\alpha\varphi = f\mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^m = f'\mathrm{d}v^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}v^m,$$

那么

$$f = f'J = f' \mid J \mid,$$

并且，$\mathrm{supp}\, f = \mathrm{supp}\, f' = \mathrm{supp}(g_\alpha\varphi) \subset U_i \cap U_j$. 根据 Riemann 积分的变量代换公式，有

$$\int_{U_i \cap U_j} f'\mathrm{d}v^1 \cdots \mathrm{d}v^m = \int_{U_i \cap U_j} f' \mid J \mid \mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^m == \int_{U_i \cap U_j} f\mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^m,$$

即

$$\int_{U_i} g_\alpha\varphi = \int_{U_i \cap U_j|_i} g_\alpha\varphi = \int_{U_i \cap U_j|_j} g_\alpha\varphi = \int_{U_j} g_\alpha\varphi. \tag{Ⅱ.44}$$

由于 φ 的支集 $\mathrm{supp}\,\varphi$ 是紧致的，$\mathrm{supp}\,\varphi$ 只与有限多个支集 $\mathrm{supp}\, g_\alpha$ 相交，因此，(Ⅱ.40)式的右端只是有限多项的和. 令

$$\int_M \varphi = \sum_\alpha \int_{U_i} g_\alpha\varphi. \tag{Ⅱ.45}$$

对于每个附属于 Σ 的单位分解 $\{g_\alpha\}$，(Ⅱ.45)式右端是完全确定的. 还要说明(Ⅱ.45)式与单位分解 $\{g_\alpha\}$ 的选取无关.

设 $\{g'_\alpha\}$ 是附属于 Σ 的另一单位分解，那么

$$\begin{aligned} \sum_\beta \int_M g'_\beta\varphi \ \sum_\beta \sum_\alpha \int_M g_\alpha g'_\beta\varphi & \\ = \sum_\alpha \int_M \sum_\beta g'_\beta g_\alpha\varphi & \\ = \sum_\alpha \int_M g_\alpha\varphi. & \end{aligned} \tag{Ⅱ.46}$$

因此，可以有下列定义.

定义Ⅱ.8 *设 M 是 m 维的定向的微分流形，φ 是 M 上具有紧致支集的 m 次外微分形式. 由(Ⅱ.45)式所定义的数值 $\int_M \varphi$ 称为外微分式 φ 在 M 上的积分.*

如果 φ, φ_1, φ_2 都是 M 上有紧致支集的 m 次外微分形式，那么，$\varphi_1 + \varphi_2$ 有紧致支集；对任何实数 c, $c\varphi$ 也具有紧致支集，按照积分的定义，显然可得

$$\begin{cases}\int_M(\varphi_1+\varphi_2)=\int_M\varphi_1+\int_M\varphi_2,\\ \int_M(c\varphi)=c\int_M\varphi,\end{cases}\tag{Ⅱ.47}$$

因此,积分 $\int_M$ 是 M 上有紧致支集的 m 次外微分形式集合上的线性泛函.

如果 supp φ 恰好落在一个坐标邻域 U 内,并且,U 的顺向坐标系为 $(u^1, \cdots, u^m)$,那么,$\varphi = f(u_1, \cdots, u^m)\mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^m$,而 $\int_M$ 正好是普通的 Riemann积分. 这里的定义是 Riemann 积分的推广.

如果 φ 是 $r < m$ 次外微分形式,supp φ 紧致,那么可以定义 φ 在 M 的某 r 维子流形上的积分. 设 $h: N \to M$ 是 M 的 r 维嵌入子流形,那么,$h^*\varphi$ 是 r 维光滑流形 N 上的 r 次外微分形式,并且 supp $h^*\varphi$ 为紧致,可定义积分 $\int_N h^*\varphi$. 我们有定义

$$\int_{h(N)}\varphi \overset{\text{def}}{=} \int_N h^*\varphi.\tag{Ⅱ.48}$$

四、Stokes 公式

在微积分中,很多公式反映区域上的积分和它的边界积分之间的深刻关系. 在微分流形上的积分的框架下,它们可统一为 Stokes 公式.

定义Ⅱ.9　设 M 是 m 维光滑流形. 所谓带边的区域 D 是指流形 M 的一个子集,其中的点分为两类:

(i) 内点,即在 M 中有该点的一个邻域包含在 D 内;

(ii) 边界点,它的定义是:设 $p \in M$, 则 p 邻近有一个坐标系 (U_i, u^i),使 $u^i(p) = 0$, 并且

$$U \cap D = \{q \in U;\ u^m(q) \geqslant 0\}.$$

具有上述性质的坐标系 (U_i, u^i) 称为边界点 p 的适用坐标系.

带边区域边界点的集合称为 D 的边界,记为 B.

命题Ⅱ.10　带边区域 D 的边界 B 是正则的闭子流形. 如果 M 是可以定向的,那么,B 也是可定向的.

证明　区域 D 的边界 B 显然是 M 的闭子集. 设 (U_i, u^i) 是 $p \in B$ 的适用坐标系,那么

$$U \cap B = \{q \in U;\ u^m(q) = 0\}.$$

因此,B 是闭子流形. 根据命题Ⅰ.17,B 是 M 的正则子流形.

设 M 是定向流形,对任何 $p \in B$, 取关于 M 定向的顺向坐标邻域(U, u^i),它也是 p 的适用坐标系,那么,$(u^1, \cdots, u^{m-1})$ 是 B 在点 p 的局部坐标系,以定义Ⅱ.9 中的第(ii)类点的适用坐标邻域 U_i 覆盖 B,那么,$U_i \cap B$ 构成 B 的一个覆盖. 在每个 U_i 上,$(u_i^1, \cdots, u_i^{m-1})$ 为 B 的局部坐标,并使 U_i 是与 M 定向相容的坐标邻域. 这样,我们对 $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, 有

$$\frac{\partial(u_i^1, \cdots, u_i^m)}{\partial(u_j^1, \cdots, u_j^m)} > 0. \tag{Ⅱ.49}$$

而在 $B \cap U_i \cap U_j$ 上 $u_i^m = u_j^m = 0$. 因此

$$\left.\frac{\partial u_i^m}{\partial u_j^\alpha}\right|_{B \cap U_i \cap U_j} = 0,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant m-1, \tag{Ⅱ.50}$$

而当 $u_i^m > 0$ 时 $u_j^m > 0$, 所以

$$\left.\frac{\partial u_i^m}{\partial u_j^m}\right|_{u_j^m=0} = \lim_{u_j^m \to 0} \frac{u_i^m}{u_j^m} \geqslant 0. \tag{Ⅱ.51}$$

从(Ⅱ.49)式、(Ⅱ.50)式和(Ⅱ.51)式得

$$\frac{\partial(u_i^1, \cdots, u_i^{m-1})}{\partial(u_j^1, \cdots, u_j^{m-1})} > 0. \tag{Ⅱ.52}$$

因此,B 是可定向的.

证迄

边界 B 有一个从 M 上的定向而来的诱导定向,设(U, u^i)是 B 中任一点 p 的上述讨论的局部坐标,那么,$(-1)^m \mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{m-1}$ 决定 $U \cap B$ 中的定向称为 M 在 B 上的诱导定向. 当 D 与 M 定向一致时,具有诱导定向的边界记作∂D.

定理Ⅱ.11(Stoke 公式) *设 M 是 m 维微分流形,$D \subset M$ 是带边区域,ω 是 M 上有紧致支集的 $m-1$ 次外微分形式,那么*

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D} \omega, \tag{Ⅱ.53}$$

如果,$\partial D = \varnothing$, 那么,规定上式右端的积分为零.

证明 设$\{U_i\}$是 M 的顺向坐标覆盖,$\{g_\alpha\}$是附属于$\{U_i\}$的单位分解,那么

$$\omega = \sum_\alpha g_\alpha \omega. \tag{Ⅱ.54}$$

由于支集 supp φ 是紧致的,上式右端是只是有限项的和,因此

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \sum_\alpha \int_D \mathrm{d}(g_\alpha \omega),$$

$$\int_{\partial D} \omega = \sum_\alpha \int_{\partial D} g_\alpha \omega.$$

于是,只要对每个 α 证明

$$\int_D \mathrm{d}(g_\alpha \omega) = \int_{\partial D} g_\alpha \omega$$

就够了.不妨假设 $\operatorname{supp}\omega$ 包含在 M 的一个顺向坐标邻域(U, u^i)内.设 ω 的表达式为

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} a_j \mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}u^j} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^m, \qquad (\text{II}.55)$$

其中,a_j 是 U 上的光滑函数,那么

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial a_j}{\partial u^j} \mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^m. \qquad (\text{II}.56)$$

下面分两种情形:

(i) 如果 $U \cap \partial D = \varnothing$, 那么,(II.53)式右端因 $\partial D \subset M \backslash U \subset M \backslash \operatorname{supp}\omega$ 而为零.

a) $U \subset M \backslash D$, 那么,(II.53)式左端也为零.

b) $U \subset \operatorname{int} D$, 那么,从(II.56)式得到

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \sum_{j=1}^{m} \int_U \frac{\partial a_j}{\partial u^j} \mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^m. \qquad (\text{II}.57)$$

考虑$\mathbb{R}^m$ 中的一个方体 C: $|u^i| \leqslant K$, $1 \leqslant i \leqslant m$,使 $U \subset C(\operatorname{supp}\omega \subset U)$, 将 a_j 延拓到 C,并在 U 外取为 0. 显然,a_j 在 C 内是连续可微的. 这样

$$\begin{aligned}
\int_U \frac{\partial a_j}{\partial u^j} \mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^m &= \int_C \frac{\partial a_j}{\partial u^j} \mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^m \\
&= \int_{|u^i| \leqslant K,\, i \neq j} \left(\int_{-K}^{K} \frac{\partial a_j}{\partial u^j} \mathrm{d}u^j \right) \mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^{j-1} \mathrm{d}u^{j+1} \cdots \mathrm{d}u^m \\
&= \int_{|u^i| \leqslant K,\, i \neq j} (a_j(u^1, \cdots, u^{j-1}, K, u^{j+1}, \cdots, u^m) \\
&\quad - a_j(u^1, \cdots, u^{j-1}, -K, u^{j+1}, \cdots, u^m)) \mathrm{d}u^1 \cdots \mathrm{d}u^{j-1} \mathrm{d}u^{j+1} \cdots \mathrm{d}u^m \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(ii) 如果 $U \cap \partial D \neq \varnothing$, 当然设 U 是关于 M 的顺向坐标区域,并且也是边界点的适用坐标区域,即有

$$U \cap D = \{q \in U,\ u^m(q) \geqslant 0\},$$
$$U \cap \partial D = \{q \in U,\ u^m(q) = 0\}.$$

在 $\mathbb{R}^m$ 中取方体 C：$|u^\alpha| \leqslant K,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant m-1,\ 0 \leqslant u^m \leqslant K$. 当 K 充分大时，$U \cap D \subset \mathrm{Int}\, C \cup \{u^m = 0\}$.

同样将 a_j 延拓到 C 上，使 a_j 在 U 外为 0. a_j 显然为连续可微函数.

于是，(Ⅱ.53)式右端为

$$\begin{aligned}\int_{\partial D}\omega &= \int_{U\cap\partial D}\omega \\ &= \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\int_{U\cap\partial D} a_j \mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{j-1} \wedge \mathrm{d}u^{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^m \\ &= (-1)^{m-1}\int_{U\cap\partial D} a_m \mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^{m-1}. \\ &\overset{\partial D\text{为}D\text{的诱导定向}}{=} -\int_{|u^\alpha|\leqslant K,\ 1\leqslant\alpha\leqslant m-1} a_m(u^1, \cdots, u^{m-1}, 0)\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^{m-1}.\end{aligned} \tag{Ⅱ.58}$$

另一方面，(Ⅱ.53)式左端为

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \sum_{j=1}^{m}\int_{U\cap D}\mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^m. \tag{Ⅱ.59}$$

但对于 $1 \leqslant j \leqslant m-1$，有

$$\begin{aligned}&\int_{D\cap U}\frac{\partial a_j}{\partial u^j}\mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^m \\ &= \int_{|u^\alpha|\leqslant K,\ \alpha\neq j,\ m;\ 0\leqslant u^m\leqslant K}\left(\int_{-K}^{K}\frac{\partial a_j}{\partial u^j}\mathrm{d}u^j\right)\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^{j-1}\mathrm{d}u^{j+1}\cdots\mathrm{d}u^m \\ &= \int_{|u^\alpha|\leqslant K,\ \alpha\neq j,\ m;\ 0\leqslant u^m\leqslant K}(a_j(u^1, \cdots, u^{j-1}, K, u^{j+1}, \cdots, u^m) \\ &\qquad - a_j(u^1, \cdots, u^{j-1}, -K, u^{j+1}, \cdots, u^m))\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^{j-1}\mathrm{d}u^{j+1}\cdots\mathrm{d}u^m \\ &= 0.\end{aligned}$$

所以，(Ⅱ.59)式只含一项

$$\begin{aligned}&\int_{D\cap U}\frac{\partial a_m}{\partial u^m}\mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^m \\ &= \int_{|u^\alpha|\leqslant K}(a_m(u^1, \cdots, u^{m-1}, K) - a_m(u^1, \cdots, u^{m-1}, 0)\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^{m-1} \\ &= -\int_{|u^\alpha|\leqslant K} a_m(u^1, \cdots, u^{m-1}, 0)\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^{m-1}.\end{aligned}$$

这就证明了(Ⅱ.53)式.

证迄

设 ω 是任一微分形式，d 是外微分算子. 如果 $\mathrm{d}\omega = 0$，称 ω 为闭形式. 如果存在 η，使 $\omega = \mathrm{d}\eta$，那么，ω 称为正合形式. 设

$$Z^r(M, \mathbb{R}) = \{\omega \in A^r(M),\ \mathrm{d}\omega = 0\},$$

$$B^r(M, \mathbb{R}) = \{\omega \in A^r(M), \text{若存在 } \eta \in A^{r-1}(M), \text{使 } \mathrm{d}\eta = \omega\}.$$

考虑序列

$$A^0(M) \to A^1(M) \to \cdots \to A^{r-1}(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} A^r(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} A^{r+1}(M) \to \cdots,$$

那么，闭的外微分形式全体 $Z^r(M, \mathbb{R})$ 是 $\mathrm{d}: A^r(M) \to A^{r+1}(M)$ 的核，正合的 r 次外微分形式全体 $B^r(M, \mathbb{R})$ 是 $\mathrm{d}: A^{r-1}(M) \to A^r(M)$ 的像，由 Poincare 引理知道，$B^r(M, \mathbb{R}) \subset Z^r(M, \mathbb{R})$.

定义 Ⅱ.12　*商空间*

$$H^r(M, \mathbb{R}) = Z^r(M, \mathbb{R}) / B^r(M, \mathbb{R})$$

称为流形 M 的第 r 个 de Rham 上同调群.

de Rham 上同调群是由流形 M 上的微分结构决定的. 但是，下列著名的定理说明它事实上是由拓扑结构所决定的.

定理 Ⅱ.13(de Rham 定理)　*设 M 是紧致的微分流形. 第 r 个 de Rham 上同调群和 M 的第 r 个上同调群同构. 若记*

$$\dim H^r(M, \mathbb{R}) = b_r,$$

那么，b_r 就是流形 M 的第 r 个 Betti 数.

证明从略.

最后，我们从同调论的角度来看命题Ⅱ.3. 设 $f: M \to N$ 是可微映照，它诱导的同态 $f^*: A^r(N) \to A^r(M)$ 和外微分算子 d 是可交换的. 如果 $\omega \in Z^r(N, \mathbb{R})$，那么

$$\mathrm{d}(f^*\omega) = f^*(\mathrm{d}\omega) = 0.$$

所以，$f^*\omega \in Z^r(M, \mathbb{R})$. 因此，$f^*$ 是 $Z^r(N, \mathbb{R})$ 到 $Z^r(M, \mathbb{R})$ 的同态，同样，f^* 也给出了 $B^r(N, \mathbb{R})$ 到 $B^r(M, \mathbb{R})$ 的同态. 这样，f^* 也诱导了 de Rham 群之间的同态

$$f^*: H^r(N, \mathbb{R}) \to H^r(M, \mathbb{R}).$$

作为命题Ⅱ.3 的推论，我们得到可微映照：$f: M \to N$ 诱导出 de Rham 上同调群 $H^r(N, \mathbb{R})$ 到 $H^r(M, \mathbb{R})$ 的同态 f^*.

索　　引

三画

四画

五画

六画

七画

八画

九画

十一画

十二画

十三画

十四画

参 考 文 献

[1] M. Berger, Sur quelques variétés riemanniennes suffisamment pincées, Bull. Soc. Math. France, 88(1960), 57-71

[2] P. Buser and H. Karcher. Gromov's almost flat manifolds, Astérisque 81, Société Math. France Paris, 1981

[3] E. Calabi, On Ricci curvature and geodesics, Duke Math. J. 34(1967), 667-676

[4] S. Y. Cheng, Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications, Math. Z. 143(1975), 289-298

[5] S. S. Chern, A simple intrinsic proof of Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds, Ann. Math. 45(1944), 747-752

[6] S. S. Chern, Characteristic classes of Hermitian manifolds, Ann. Math. 47(1946), 85-121

[7] 陈省身,陈维恒,微分几何讲义,北京大学出版社,1983

[8] S. Donaldson, An application of gauge theory to the toplogy of 4-manifolds, J. Diff. Geo. 18(1983), 269-316

[9] M. Freedman, The toplogy of four-dimensional manifolds, J. Diff. Geo. 17(1982), 357-454

[10] L. Z. Gao and S. T. Yau, The estimates of negative Ricci curved metrics on three manifolds, Invent. Math. 85(1986), 637-652

[11] C. F. Gauss, Disquisitiones genrales circa superficies curvas, Goettingschs Gelehrte Anzeigen N. 177(1827),1761-(英文翻译:General investigation of curved surfaces, Asterisque V. 62(1979))

[12] 华罗庚,高等数学引论,第一卷第一分册,第二章§10,科学出版社,1963

[13] M. Kervaire, A manifold which does not admit any differential structure, Comm. Math. Helv. 34(1960), 257-270

[14] 李忠等,双曲几何,第二章§9,湖南教育出版社,1991

[15] J. Lokamp, Metric of negative Ricci curvature, Ann. Math. 140(1994), 655-683

[16] J. Milnor, Morse Theory, Ann. Math. Studies 51, Princeton Press, 1963

[17] J. Milnor, A note on curvature and fundamental group, J. Diff Geom., 2 (1968), 1-7

[18] J. Milnor, On manifolds homemorphic to the 7-sphere, Ann. Math., 64 (1956), 399-405

[19] A. P. Morse, The behavior of a function on its critical set, Ann. Math. 40 (1939), 62-70

[20] Shin-Ichi Ohta, Uniform convexity and smoothness, and their applications in Finsler geometry, Math. Ann. 343(3)(2009), 669-699

[21] B. Riemann. Collected works. Dover, New York, 1953

[22] R. Schoen and S. T. Yau, On the proof of the positive mass conjecture in general relativity, Comm. Math. Physics 65(1)(1979), 45-76

[23] K. Shiohama, A sphere theorem for manifolds of positive Ricci curvature, Trans. A. M. S. 275(1983), 811-819

[24] M. Spivak, A comprehansive introduction to differential geometry, Publish or Perish Inc. 1979

[25] S. Sternberg, Lectures on differential geometry, Prentice-Hall Inc. 1964

[26] V. A. Toponogov, Riemannian spaces having their curvature bounded below by a positive number, Uspehi Math. Nauk. 14(1959),87-135; English transl. Transl. A. M. S. (1964), 291-336

[27] B. Y. Wu and Y. L. Xin, Comperison theorems in Finsler geometry and their applications, Math. Ann. 337(2007), 177-196

[28] H. Whitney, A function not constant on a connected set of critical points, Duke Math. J. vl(1935), 514-517

[29] Yuanlong Xin, Geometry of harmonic maps, Birkhäuser, 1996

[30] Yuanlong Xin, Ricci curvature and fundamental group, Chin. Math. 27B (2)(2006), 113-120

[31] C. N. Yang and R. L. Mills, Isotopic spin conservation and a generalized Gauge invariance, The Physical Review 95(1954), 631

[32] Yi-hu Yang, On the grouth of fundamantal group on nonpositive curvature manifolds, Bull. Ausstral. Math. 54(1996), 483-487

[33] S. T. Yau, On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, Nat. Acad. Sci. U. S. A. 74(1977), 1798-1799

图书在版编目(CIP)数据

黎曼几何讲义/忻元龙编著.—上海:复旦大学出版社,2010.12
(研究生教学用书)
ISBN 978-7-309-07673-8

Ⅰ.黎…　Ⅱ.忻…　Ⅲ.黎曼几何-研究生-教材　Ⅳ.0186.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 208427 号

黎曼几何讲义
忻元龙　编著
出品人/贺圣遂　责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号　邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857　团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
同济大学印刷厂

开本 787×960　1/16　印张 12.25　字数 215 千
2010 年 12 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-07673-8/O·460
定价:25.00 元

如有印装质量问题,请向复旦大学出版社有限公司发行部调换。
版权所有　侵权必究